SECCION DE PROBLEMAS

En este número proponemos un conjunto de Problemas. Aquellos que los solucionen pueden enviar las respuestas a la dirección de la revista (I.N.B. Tejina-Tenerife) para su publicaci'on en números posteriores.

1.- Hallar dos números tales que su producto y su suma valgan 1. Representar esos números.

2.- Construir un cuadrado conociendo la diferencia que existe entre su diagonal y su lado. Sugerencia: hacer uso de la homotecia.

3.- Hallar el m.c.d. de los polinomios:

$$p(x) \equiv x^3 - 2x^2 - x - 2$$

$$q(x) \equiv x^4 + 2x^3 + 2x^2 - 2x - 3$$

4.- Construir un cuadrado conociendo un vértice A de él y sabiendo que los vértices contiguos al A están en una recta dada y el otro en una circunferencia también dada. Sugerencia: aplicar un giro.

5.- Hallar un número N, de seis cifras, tal que al multiplicarlo por 1, 2, 3, 4, 5,y 6 tengan dichos productos las mismas cifras que el número N pero permutandos en orden circular.

6.- Dadas dos circunferencias coplanarias secantes y desiguales, trazar por uno de los puntos de intersección una cuerda que quede dividida por ese punto en dos segmentos iguales.

(Problemas propuestos por D. Luis García Fernández)

Los que siguen han sido traducidos por Dª Arantzazu Garijo de "Annales Corrigées du Baccalaureat (Mathematiques-Cet E) 1976-77".

7.- Sea A el conjunto de aplicaciones f del intervalo $[0,1]$ en R, $f(x) = ax + b$

$$A = \{ f / \exists (a,b) \in R^2, \ \forall x \in [0,1] \quad f(x) = ax + b \}$$

Probar que A puede tener estructura de espacio vectorial sobre R.

Sea φ la aplicación de A en R tal que $\forall f \in A \quad \varphi(f) = \frac{a}{2} + b$

Probar que φ es una forma lineal de A, es decir, una aplicación lineal de A en R. ¿Cual es el núcleo de φ ?.

8.- Sea f una función numérica de variable real, $f: x \longrightarrow \frac{x^2+4x+7}{x+3}$

a) Determinar los números reales a, b y c tales que $f(x) = ax + b + \frac{c}{x+3}$

b) Estudiar la función f. Demostrar que la recta de ecuación $y = ax + b$ es asíntota a la curva representativa de f. Trazar la curva y su tangente en el punto de abscisa -2.

9.- Sea A el anillo Z/8Z

a) Resolver en A A el sistema de ecuaciones siguiente

$$\bar{6}x + \bar{4}y = \bar{4}$$
$$\bar{5}x + y = \bar{4}$$

b) Resolver en A la ecuación siguiente

$$x^2 + \bar{4}x + \bar{3} = \bar{0}$$

10.- En una urna hay 10 tarjetas con el nº 3 y 5 con el nº 2. Se considera la prueba que consiste en sacar simultaneamente 2 tarjetas (todas tienen igual probabilidad)

a) Calcular la probabilidad del suceso "la suma de puntos es igual a 4"

b) Calcular la probabilidad del suceso "la suma de puntos es igual a 5"

c) Calcular la probabilidad del suceso "la suma de puntos es par".

11.- Sea E un conjunto dotado de una ley de composición interna denotada por $*$. Si el par $(a,b) \in E$ es tal que $a = b * b$, se dice que b es una raiz de a.

a) Demostrar que si dos elementos de E tienen una raiz común, son iguales.

b) Demostrar que si todo elemento de E tiene al menos una raiz, tiene una y sólo una.

12.- Una tómbola tiene 50 billetes de los cuales 10 tienen premio y 40 nó. Se compran 3 billetes ¿cuales son las probabilidades de ganar:

a) un premio, b) 2 premios, c) a lo más 1 premio?.

13.- Sea f una función numérica de variable real x, definida por

$$f(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{2}.$$

a) Estudiar las variaciones de la función f

b) Demostrar que f es una biyección entre $[0,3]$ y $\left[-\frac{3}{2},3\right]$

Determinar la recíproca f^{-1}

c) Representar f y f^{-1}.