INTRODUCCION HEURISTICA DEL CONCEPTO DE NUMERO REAL EN EL BACHILLERATO (*)

José R. Pascual Ibarra.

El problema didáctico que presenta la introduc---
ción del número real en la enseñanza media suele ser un ==
tanto conflictivo. Muchos profesores opinan que hacerlo ==
con el rigor exigible en toda construcción matemática supe
ra la capacidad media de los alumnos de este nivel, y, ===
puesto que, por otra parte, en las aplicaciones prácticas/
se ha de operar siempre con valores racionales aproximados,
estiman suficiente que el alumno tome conciencia de la ===
existencia de los irracionales "definidos" como números de
cimales con infinitas cifras decimales y no periódicas. ==
Así:

$$\sqrt{2} = 1{,}4142\ldots$$

$$\pi = 3{,}1415\ldots$$

$$e = 2{,}7182\ldots$$

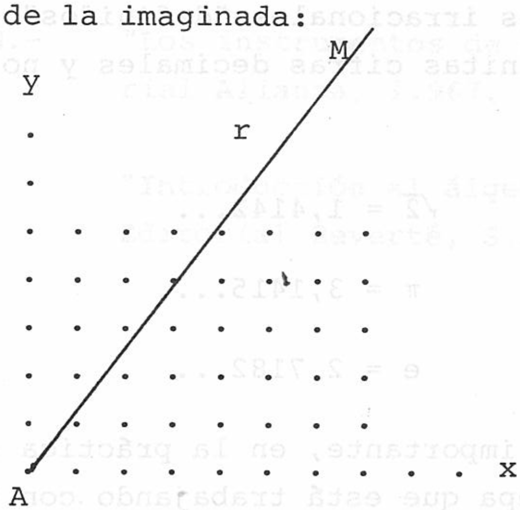
Lo más importante, en la práctica operatoria, es/
que el alumno sepa que está trabajando con valores no exac
tos y que en todo momento conozca las cotas de los errores
cometidos al operar con ellos, utilizando en cada caso con
creto la aproximación requerida.

Esta manera de pensar es seguramente acertada -y/
la más conveniente- en muchas clases, pero en algunas qui-
zá pueda llegarse, sin dificultades insuperables, y sin ==
pérdida de tiempo, a una construcción heurística y no exen
ta, sin embargo, del necesario rigor. Con este fin, he pre
parado para estos estudiantes la siguiente lección activa,
inspirada en parte en la exposición que hace del tema M. =
CALAME, en su obra Mathématiques Modernes III.

(*) Lección presentada por el autor en el XXVIII Encuentro de la C.I.E.A.E.M. Louvain-La-Neuve. (Bélgica), 1.976.

Comienzo por proponer a los alumnos la siguiente situación imaginada. Suponed -les digo- un bosque de longitud y anchura tan grandes como querais en el que los árboles se sitúan regularmente sobre los vértices de una cuadrícula, y tan próximos como se quiera, esto es, el lado de la cuadrícula es muy pequeño. Imaginad ahora un cazador colocado junto a uno de estos árboles, ¿podrá realizar un disparo, supuesto de gran alcance, y que el proyectil atraviese la totalidad del bosque sin chocar con ninguno de los árboles?. La contestación es unánime: no es posible.

Seguidamente presentamos la situación geométrica representativa de la imaginada:

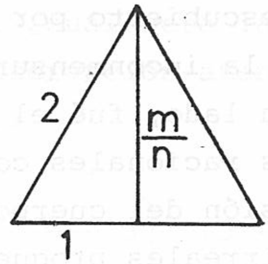


El problema matemático que traduce la situación del cazador es: ¿existe una semirrecta que partiendo de A no pasa por ningún punto de la cuadrícula?.

Después de un corto tiempo de reflexión, les propongo que dibujen la recta r, de pendiente 60° respecto del eje Ax. ¿Esta recta -en vuestra opinión- debe necesariamente pasar por un vértica de la cuadrícula?. Sea, pues, M uno de estos puntos. Sus coordenadas (n,m) serán números enteros y se verificará:

$$\tan 60° = \frac{m}{n} , \qquad m,n \in N.$$

Pero, si dibujais un triángulo equilátero



se encuentra:

$$\left(\frac{m}{n}\right)^2 = 2^2 - 1^2 = 4 - 1 = 3$$

y por tanto,

$$m^2 = 3n^2.$$

Ahora bien, en la descomposición de m^2 en factores primos, los exponentes de todos estos factores son números pares, en tanto que, en la descomposición de $3n^2$, el factor primo 3 aparecerá con exponente impar, lo que hace/ contradictoria la conclusión, y, en consecuencia, niega la hipótesis: La recta r considerada no puede pasar por ningún punto de la cuadrícula.

De hecho podríamos ver que hay una infinidad de = trayectorias rectilíneas que partiendo del punto A no pasan por otro de la red. Más aún, hay una inifinidad no numerable de estas rectas, lo que en lenguaje de probabilidades quiere decir que si trazamos por A una semirrecta al = azar, lo más probable es que sea una de ellas ...

Sin embargo, la realidad es muy distinta. Los árboles no son puntos -tienen un cierto espesor- y este hecho confirma una vez más el aserto de Einstein: "Las proposiciones matemáticas, cuando se refieren a la realidad, no son ciertas; y cuando son ciertas no son reales". De todas maneras, la matematización esquemática de la situación imaginada nos ha llevado a una verdad matemática: no existen/ dos número naturales tales que el cuadrado de uno de ellos sea el triple del cuadrado del otro. Igualmente se prueba/ que la ecuación $m^2 = 2n^2$ carece de soluciones enteras. Es-