OLIMPIADA DE MATEMATICAS EN BELGICA

Traducido de:

"L'Enseignement de la Mathematique en Belqique"

por

Mª Josefa Alvarez Gómez

En 1.976 la Sociedad Belga de Profesores de Matemáticas organizó la Olimpiada Matemática Belga.

Existen dos categorías de participantes:

a) Estudiantes de clases superiores a 3º, de edad entre 15 y 18 años. Para ellos es la Olimpiada MAXI.

b) Estudiantes de clases inferiores a 3º, de edad comprendida entre 12 y 15 años.

La competición consta de dos partes:

En la 1ª se les somete a los participantes a un test de elección múltiple. En pocos minutos deben contestar a una serie de preguntas variadas (30 aproximadamente en MINI y 40 en MAXI). Esto, el mismo día, en todas las escuelas.

De 30 a 40 de los mejores participantes pasan a la 2ª parte que es problemas.

He aquí los puestos en esta 2ª parte desde 1.976:

1.976.

MAXI

1. Examina atentamente las igualdades siguientes:

$$1 = 1$$
$$3 + 5 = 8$$
$$7 + 9 + 11 = 27$$
$$13 + 15 + 17 + 19 = 64$$
$$21 + 23 + 25 + 27 + 29 = 125$$

Cuál es la propiedad general sugerida por estas igualdades?. Exprésala en la forma más precisa posible y da una demostración de la misma.

2. Determina el número y signo de las raices reales del polinomio:

$$x^5 - 5x^3 + 10 + k$$

para los distintos valores de $k \in \mathbb{R}$

3. En un plano π se considera un polígono convexo de n lados ($n\geq 3$) es decir una n-upla de puntos distintos (a_o, a_1,...a_{n-1}) tales que para cada dos tectas $a_oa_1, a_1a_2, \ldots, a_{n-1}a_o$, los n-2 otros puntos, están todos en un mismo semiplano abierto, determinado por esta recta.

Para todo punto p_o del segmento $[a_o, a_1]$, se define la sucesión $S(p_o)$ de puntos

$$p_o, p_1, p_2, \ldots, p_i, \ldots \qquad (i \in N)$$

de la manera siguiente:

p_1 es la intersección de la recta a_1a_2 y de la paralela a a_oa_2 que pasa por p_o

p_2 es la intersección de la recta a_2a_3 y de la paralela a a_1a_3 que pasa, por p_1

.

.

.

p_i ($i\geqslant 1$) es la intersección de la recta a_ia_{i+1} y de la paralela a $a_{i-n}a_{i+1}$ que pasa por p_{i-1}

(entendiendo que para $i\geq n-1$ se toma $a_n=a_o$, $a_{n+1}=a_1$, $a_{n+2}=a_2$, ..., y en general $a_{qn+r}=a_r$ donde, $q>0$ y $0\leq r<n$).

(1) ¿La sucesión $S(p_o)$ puede contener una infinidad de puntos distintos para una elección conveniente del n-polígono convexo y del punto p_o?.

(2) Es cierto que existen n-polígonos convexos y puntos p_o, para los que la sucesión $S(p_o)$ no contiene más que un número finito de puntos distintos.
¿cuales son los valores que puede tomar este número

y, para un valor dado v, cuales son los n-polígonos = convexos y los puntos p_o tales que la sucesión $S(p_o)$/ contenga precisamente v puntos distintos?.

4. Probar que, para todo $x \in \mathbb{R}$

$$\cos(\operatorname{sen} x) > \operatorname{sen}(\cos x)$$

5. Recordemos que si r es un número real $[r]$ designa el mayor entero inferior o igual a r. Dado un número natural/ $n \geq 1$ y un número real x, el redondeo de orden n de x se = define por:

$$a_n(x) = 10^{-n}[10^n x + 0{,}5]$$

Ejemplos:

$a_3(1'12647) = 1'236$

$a_3(1'2365) = 1'237$

$a_3(1'23661) - 1'237$

$a_3(1'29973) = 1'300$

Se elige al azar un número real "x" entre aquellos para/ los cuales $a_3(x) = 1'236$ y un número real "y" entre aquellos para los cuales $a_3(x) = 2'742$

¿Cuál es la probabilidad de tener:

$$a_3(xy) = a_3(1{,}236.2{,}742) = 3{,}389$$

1.977

MAXI

1. Desde la cima S de una montaña se ve en la llanura dos = puntos a y b distantes entre si 2 kms. Las visuales hacia a y hacia b forman un ángulo de 30°. La inclinación/ de la primera línea de visión en relación con la horizontal es de 15° y la de la segunda visual es de 20°. Los = puntos a y b yienen la misma altitud. Calcular con aproximación de 1 m, la diferencia de altura entre a y S.

2. Determinar las funciones indefinidamente derivales $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tales que