

ERRORES OPERATIVOS MAS FRECUENTES

Coordinadores **Carlos Olano Lorenzo-Cáceres**
José Antonio Rupérez Padrón

Todos somos concientes de los repetidos errores operatorios de nuestros alumnos y podemos citar dos o tres ejemplos. Pero cuando nos planteamos cuáles son los errores más comunes en la mecánica operatoria ha sido imposible hacer una lista cerrada.

ha sido imposible hacer una lista cerrada.

El segundo punto es el análisis de las causas de estos errores. Es un tema de estudio muy complejo, el que hay que dedicarle muchas más horas de trabajo y profundización. ¿Qué metodología hay que seguir?

Un tercer aspecto estriba en la corrección de esos errores operatorios, una vez adquiridos. Creemos que está muy en relación con el segundo punto, con las causas que dan lugar a los mismos.

Admitimos que entre las causas están: la falta de atención, incapacidad de retención, «la ley del mínimo esfuerzo», etc. Todo ello conduce al olvido o falta de conocimiento del concepto en sí.

Después, lo sabemos por experiencia, se prescinde del concepto y se opera mecánicamente. Pero el conocimiento del concepto es esencial y podremos recurrir a él cuando sea necesario. Pensamos que parte del problema está aquí. Nosotros, profesores, somos capaces mentalmente de seguir un proceso operativo sin perder los conceptos en que se apoya; pero en la pizarra sólo se refleja el mecanismo operatorio, los alumnos no tiene capacidades telepáticas y sólo ven una especie de magia que hace el profesor y le permite llegar a donde pretende, sustituyendo, eliminando o añadiendo términos que extrae de un invisible sombrero de copa. Estamos llenos de «manías» que son fatales para nuestros alumnos; una mala costumbre por parte nuestra, aunque generalmente admitida, es quizás responsable de no pocos de esos errores que suelen cometer nuestros muchachos.

De la lista de errores más comunes, que sistemáticamente realizó el Grupo de trabajo, decidimos centrarnos en aquellos que podían ser clasificados en estos cuatro grupos un tanto heterodoxos.

I) El problema del 1 y del - 1

Errores frecuentes:

- $a/a = 0$ que surge de $a/a = \cancel{a}/\cancel{a} = 0/0 = 0$
- No aprecian el coeficiente 1, cuando no está escrito.
- Dejan como fracción $a/1$.
- El 1 como exponente y como factor, que da lugar a un error tan común como: $x^2 - x = x(x-?)$

Causas posibles de estos errores:

- Omisión del 1 por parte del profesor al «tachar» simplificando.
- Idem al descomponer en factores primos

Consideraciones:

- Sería conveniente no omitir el 1 para evitar cierto tipo de errores; asimismo insistir en $1 \cdot x = x$; $x/1 = x$ y $x^1 = x$
- Mala costumbre de «tachar» (simplificar) antes de haber madurado el concepto.

Se corre el riesgo de llegar a $\frac{2+x}{2} = x$

II) Propiedad distributiva.-

Errores frecuentes:

- $4(3+2) = 4 \cdot 3 + 2$
- $(a+b) \cdot c = ?$
- No poner paréntesis para multiplicar por una suma indicada.
- El signo menos delante de un paréntesis que encierra una suma (error relacionado con el apartado anterior).

$$-(a+b) = -a+b$$

- El signo menos ante una fracción cuyo numerador es una suma.
- Dificultades para descomponer en dos fracciones una, que lleva una suma en el numerador

$$\frac{a+b}{2} = \frac{a}{2} + \frac{b}{2}$$

- A la inversa: «facilidad» para descomponer una fracción cuyo denominador es una suma:

$$\frac{a}{b+c} = \frac{a}{b} + \frac{a}{c}$$

- Aplicación de «la propiedad distributiva del producto respecto al producto»:

$$a(b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot (a \cdot c)$$

Causas posibles de estos errores:

- Los alumnos no tienen claro el uso del paréntesis y la prioridad de operaciones, y no saben aplicarlo a la propiedad distributiva.
- No se insiste lo suficiente en que dividir es multiplicar por el inverso.
- No captar en que aplicar la propiedad distributiva requiere dos operaciones diferentes, con distinta potencialidad operativa.
- No darse cuenta que $a/b = a:b$
- La costumbre de escribir las igualdades siempre en el mismo sentido: $a(b+c) = \dots$ y no $(b+c) \cdot a = \dots$. Además de $a(b+c) = ab+ac$ y no $ab+ac = a(b+c)$.

Consideraciones:

- El uso del paréntesis y de la prioridad de operaciones. Dos caminos respecto al uso del paréntesis: poner sólo los necesarios «haciéndoles ver» tal necesidad, o bien poner paréntesis que faciliten ver la prioridad de operaciones, eliminando posteriormente los no necesarios.
- Una regla nemotécnica para la propiedad distributiva $a(b+c) =$ «Para bajarse de la guagua todos tienen que pasar por el cobrador» «la

guagua»: el paréntesis; «El cobrador»: el factor a; «los pasajeros»: cada uno de los sumandos con su signo.

III) Falsos Homomorfismos

Errores frecuentes:

* $(a + b)^2 = a^2 + b^2$

- $\sqrt{a + b} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$

* $(a + b) \cdot (a - b) = (a - b)^2$

* $\text{Log}(a + b) = \text{Log } a + \text{Log } b$; $\text{sen}(a + b) = \text{sen } a + \text{sen } b$
 $\text{sen } 3\alpha = 3 \text{sen } \alpha \dots$ y otros menos frecuentes

IV) Problemas de lenguaje

Muchas veces utilizamos expresiones que pueden inducir (pensamos) a errores.

Por ejemplo:

- «Quitar paréntesis»
- «Quitar denominadores»
- «Tachar» en lugar de simplificar
- «Se va»
- No está bien claro para muchos alumnos el significado de «triple de», que confunden con «aumentando en tres»; «restado a» y «restándole», o «restando de».
- Imprecisión en términos como: «resolver», «efectuar», «hallar», «simplificar»; «operar», etc. No distinguen diferencias entre unos y otros. Para la mayoría «resolver» es sinónimo de los demás, y la única a emplear. («Resolver un Polinomio»). Tengamos presente que la utilización correcta y precisa del lenguaje es uno de los objetivos de nuestra disciplina.
- El problema es amplio, y en algunos casos escapa de nuestro campo, llegando hasta aspectos semánticos.

Causas posibles de estos errores:

- Al meter en un mismo tema de «expresiones notables», las expresiones $(a+b)^2 = \dots$; $(a-b)^2 = \dots$; $(a+b)(a-b) = \dots$
- No acostumbrarlos, desde que surge el cuadrado (las potencias) a trabajar con números: $(2+3)^2$, insistiendo en las gráficas de los cuadrados correspondientes.
- Darles la igualdad $(a-b)^2 = \dots$, como algo distinto totalmente de $(a+b)^2$.

Consideraciones:

- El emplear muchos ejemplos geométricos: medio metro cuadrado, un cuadrado de medio metro, mediciones de áreas que sean realizables mediante descomposición en cuadrados, Teorema de Pitágoras, etc.
- Procurar que ellos deduzcan, tras realizar varios ejercicios numéricos, la fórmula: $(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$
- Emplear la expresión cuadrado del binomio, cuando ellos no son capaces de ver el binomio más que cuando es $(a+b)$. Es muy frecuente que escriban $(x+3)^2 = x^2 + 3^2$, y al decirles ¡Pero tú no sabes hacer el cuadrado de un binomio!, responden de «carretilla» la expresión correcta, y que no han sabido aplicar.
- Es como si subscócientemente emplearan la «distributividad» de los operadores $(+)^n$, $\sqrt[n]{+}$, $\text{sen}(+)$, $\text{Log}(+)$, etc. Respecto a esto, creemos importante resaltar que con las distintas operaciones que van apareciendo les vamos señalando que en todos los casos cumplen las propiedades, y entre ellas la distributiva. Se insiste mucho en ello y de pronto, un poco marginalmente parece una «igualdad nota-

ble» en la que no se insiste lo suficiente, no se «recalca», la desigualdad $(a+b)^2 - a^2 - b^2$

- ¿El error en $(a+b)^2$ induce todos los restantes?

Valoramos la dificultad en proponer una Metodología para evitar estos errores. Pero queremos seguir trabajando en el tema, no como un equipo reducido, sino como coordinadores de otro más amplio, de un equipo que tiene como miembros activos a todos los lectores de estas líneas.

Pedimos a los compañeros que nos envíen relaciones de los errores más frecuentes en sus alumnos y observaciones respecto a las posibles causas y medios de evitarlos y corregirlos. Esta petición ya fue hecha en la clausura de las III^{as} Jornadas de la S.C.P.M. Aún esperamos una primera misiva ¿No va a llegar? Si es por el sello pueden hacerlo contrarreembolso de su importe. Si es por el tiempo que lleva ¿No creen que los resultados compensarán el tiempo ahora empleado? Lo que necesitamos es simplemente una lista, aunque sea desordenada y con repeticiones; una lista que se puede ir haciendo conforme se corrigen exámenes, en un folio o una ficha que se tenga a mano. Gracias. Todos recibirán información personalmente sobre los avances del equipo.