LOS LIMITES Y LA EXPONENCIAL
(Accesit)

por *Albert Fabrega Enfedaque*

LOS LIMITES Y LA EXPONENCIAL

Por Albert Fabrega Enfedaque

> Mácbeth: Siniestras, torvas, misteriosas brujas, negros fantasmas de la medianoche, ¿qué estáis haciendo?
> Todas: ¡una obra sin nombre!...
> W. Shakespeare

El tema que se desarrolla a continuación es uno de los tres que forman el trabajo «Notas sobre la exponencial, la derivada y la combinatoria». Cuando se me solicitó un resumen para su publicación pensé en que «para muestra bien vale un botón». Es decir, puesto que la idea es la misma para todos los temas, creo que el mejor resumen es presentar uno de ellos al completo.

Los que yo pretendí al estudiar esas cuestiones, era obtener unas líneas de pensamientos que el alumno siguiera sin mucha dificultad, y que le llevaran de forma natural e intuitiva, primero a las ideas y después a la formalización de los conceptos matemáticos.

A grandes rasgos, se trataba de hallar un problema «de la vida real» lo más simple posible, y que precisara para su correcto estudio, de los conceptos que se pretendían introducir. A continuación simplificar el problema eliminando los parámetros no significativos para la solución buscada. Finalmente, analizar los aspectos que se presentan, hasta llegar a la solución.

Evidentemente, esto no es todo lo que debe hacerse, al menos desde el punto de vista matemático. Falta lo que en opinión de muchos es lo más importante: la generalización a partir del problema y la formalización de los conceptos que surgen a lo largo de su resolución. Tal como indiqué en la introducción al trabajo, me pareció entonces, y sigo creyendo ahora, que esto viene a *continuación* y que es aquí cuando el profesor interviene dando forma rigurosa a las ideas, encadenando de manera coherente las definiciones matemáticas a los hechos que los alumnos han adquirido al estudiar el problema.

Por ejemplo, en el momento de redactar estas líneas, yo estoy trabajando con mis alumnos las sucesiones, límites y el número e. Despues que ellos respondieron a las cuestiones al final de la primera fase, tenían una idea bastante clara de lo que es el límite de una sucesión. Al menos en el sentido de que era el valor al cual la sucesión se aproximaba cada vez más. Yo tenía mis dudas de lo que ocurriría en cuanto diese el siguiente paso y presentase la definición matemática. Entonces les planteé un esquema parecido al siguiente:

«el límite es el número al cual los términos de la sucesión se aproximan cada vez más».

«a es el límite de la sucesión a_n si los números a_n se aproximan cada vez más a *a*».

«a es el límite de a_n si las diferencias entre a y a_n son cada vez más pequeñas».

«a es el límite de a_n si $|a - a_n|$ son tan pequeñas como queremos, a partir de algún término de la sucesión».

«a es el límite de a_n si $|a - a_n|$ son menores que cualquier número positivo, por pequeño que sea, a partir de algún lugar de la sucesión».

«a es el límite de a_n si para cualquier $r > 0$, a partir de algún lugar (N) en la sucesión, $|a - a_n| < r$».

«a es el límite de a_n si para cualquier $r > 0$, existe N tal que a partir de él ($n > N$), entonces $|a - a_n| < r$».

«a es el límite de a_n si para cualquier $r > 0$, existe N tal que para $n > N$ se tiene $|a - a_n| < r$».

A pesar de todo, no me atrevo a afirmar que ahora sepan qué es el límite. Pero la verdad es que durante los días que han trabajado en esto, lo han hecho con mejor ánimo de lo que desgraciadamente es corriente en la mayoría de ellos cuando de las matemáticas se trata.

En definitiva, quizás nos convenga abandonar planteamientos estrictos en cuanto al esquema «definición-propiedades-teoremas-demostraciones», en un orden obsesivo y detallista, y planteamos las cosas pensando que no son matemáticos quienes nos escuchan y que no es esa la única manera –ni creo que la mejor en este caso– de enseñar las matemáticas. No he conocido a nadie que piense siguiendo este esquema deductivo, y si ésta no es la corriente que sigue nuestro cerebro, ¿por qué debemos pretender que nuestros alumnos la sigan?

Sea como sea, ahí va:

EL NUMERO *e* Y LA FUNCION EXPONENCIAL

Tema: Expansión del Universo.
Referencia: Investigación y Ciencia – Octubre de 1976.

Problema: Ley de Hubble.

«Hubble demostró que la velocidad con que una galaxia se aleja es proporcional a su distancia de nosotros...»

Hipótesis de estudio (Modelo teórico simplificado):

a) Las galaxias son puntos.
b) Nuestra galaxia está fija y se toma de referencia. (En realidad esto da igual. La expansión no tiene centro).
c) La galaxia A se aleja de nosotros en línea recta y siempre en la misma dirección.
d) No se tiene en cuenta ninguna otra influencia sobre el movimiento de A (p.e. fuerzas gravitatorias).
e) La constante de proporcionalidad entre la distancia (d) y la velocidad (v) es 1. Es decir, $d = v$.
   Ver nota.
f) En el instante de poner el reloj en funcionamiento (t = 0), la galaxia A está a 1 m. de nosotros y su velocidad es de 1 m/seg.

Nota: En realidad la razón es la siguiente: Una galaxia a 10 millones de años luz, se aleja a 170 km/seg., que en términos de metros sería
1 año luz son aprox. 94608.10^{11} metros
170 km/seg. = 17.10^{4} m/seg.
10 millones de años luz son aprox. 94608.10^{18} metros, por tanto, a 1 m. de distancia (si esta situación fuese posible) la velocidad a que se alejaría sería de $17.10^{4}/94608.10^{18} = (17/94608).10^{-14}$ que es aprox. 18.10^{-19} m/seg. = 0,0000000000000000018 m/seg.
La relación que se utiliza en la práctica es de 17 km/seg. por cada millón de años luz.

Material: Papel milimetrado.
Regla.
Calculadora.

Nota: En todos los cálculos que figuran aquí y en los otros temas, se ha utilizado la calculadora TI-59 de Texas.

PRIMERA FASE (F-1).– SUCESIONES Y LIMITES

Queremos saber a qué distancia se hallará *A* al cabo de 1 segundo.

Recuerda: De acuerdo con el modelo $d = v$ y en el instante inicial (t = 0) d = 1 m., v = 1 m/seg.

Método: **Aproximaciones sucesivas.**

Supongamos que el cambio de velocidad no se hace de forma continua, sino que durante intervalos de tiempo regulares (cada vez más cortos), la velocidad se mantiene constante y al pasar al siguiente intervalo se produce un salto y se reajusta tomando el valor igual al de la distancia a la que se encuentra en áquel instante.

Primera aproximación (A–*1*).–

Durante el primer segundo la velocidad (v) es constante y vale 1 m/seg.

Por tanto, el espacio recorrido (s) durante este tiempo es 1 m/seg., 1 seg. = 1 m.

La distancia (d) a la que se hallará será pues de 2 m.

t	s	d	v
0	0	1 m.	1 m/seg.
(de 0 seg. a 1 seg.)	1	d + s = *1 + 1 = 2 m*	2 m/seg
1			

Ver figura 1. n = 1.

Segunda aproximación (A–*2*).–

Durante el primer medio segundo v es constante a 1 m/seg.

Durante el siguiente medio segundo v es constante y su valor es igual a la distancia a la que se encuentra A al finalizar el primer medio segundo.

t	s	d	v
0	0	1 m.	1 m/seg.
(de 0 a 1/2 seg.)	1 . 1/2 = 1/2	1m + 1/2m = 1 + 1/2	1 + 1/2
1/2			
(de 1/2 a 1 seg)	(1 + 1/2) . 1/2	1+1/2+(1+1/2).1/2= = $(1 + 1/2)^2$ (ver [a])	$(1 + 1/2)^2$
1			

[a]) $1 + 1/2 + (1 + 1/2) . 1/2 = 1 . (1 + 1/2) + 1/2 . (1 + 1/2) = (1 + 1/2) . (1 + 1/2) = (1 + 1/2)^2$

(se saca (1 + 1/2) factor común)

Ver figura 2. n = 2.

Tercera aproximación (A–*3*).–

Durante el primer tercio de segundo v es constante a 1 m/seg.

Durante el 2º tercio de segundo v es constante y su valor se reajusta haciéndose igual a la distancia a que se halla A al final del primer tercio de segundo.

Durante el tercer tercio de segundo v es constante y su valor se iguala a la distancia a que se encuentra A al fin del 2º tercio de segundo.

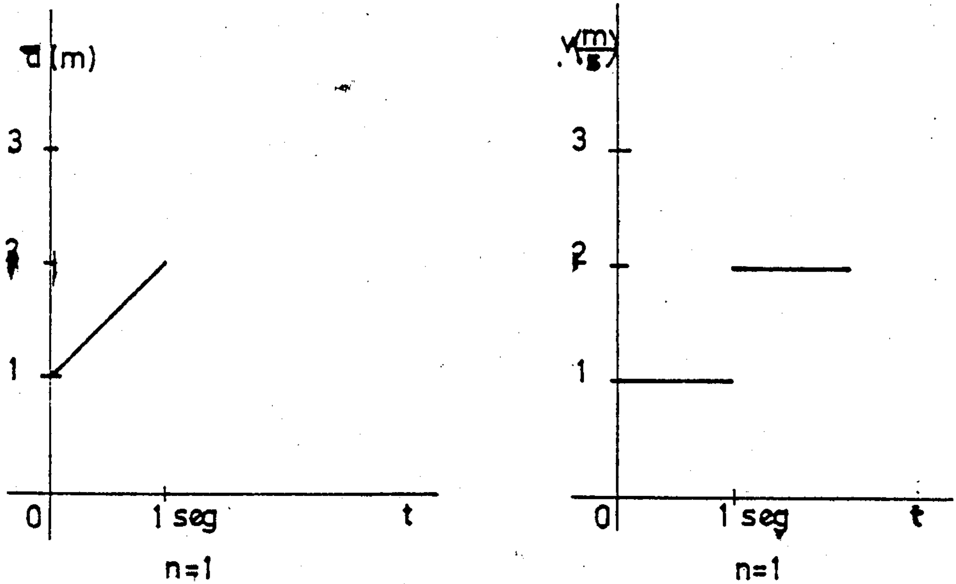


fig. 1 (n = 1)

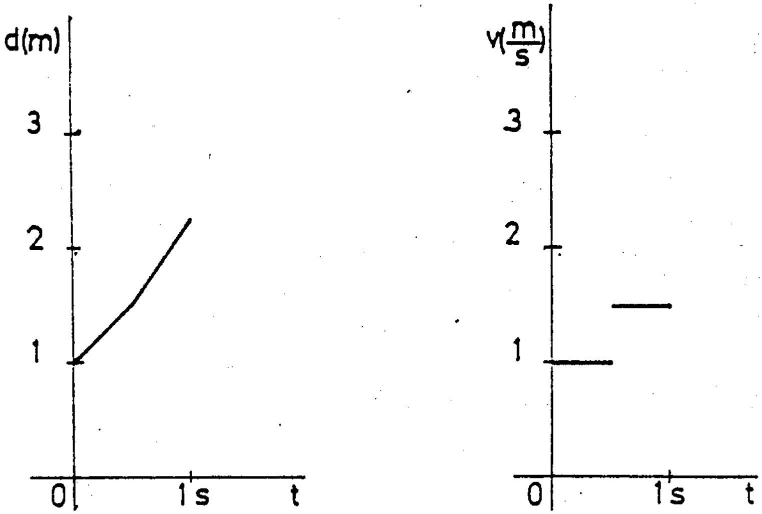


fig. 2 (n=2)

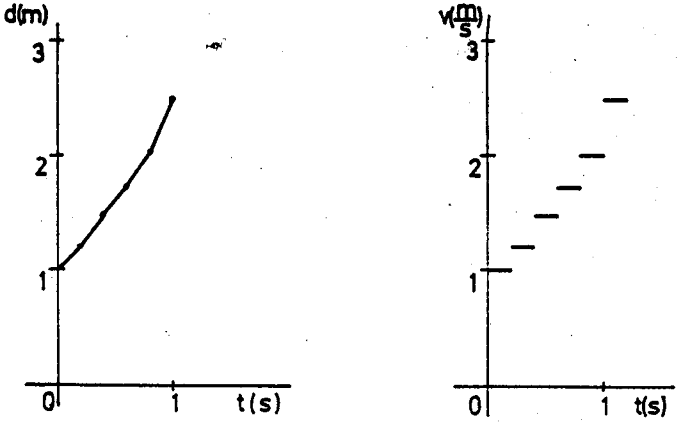


fig. 5 (n=5)

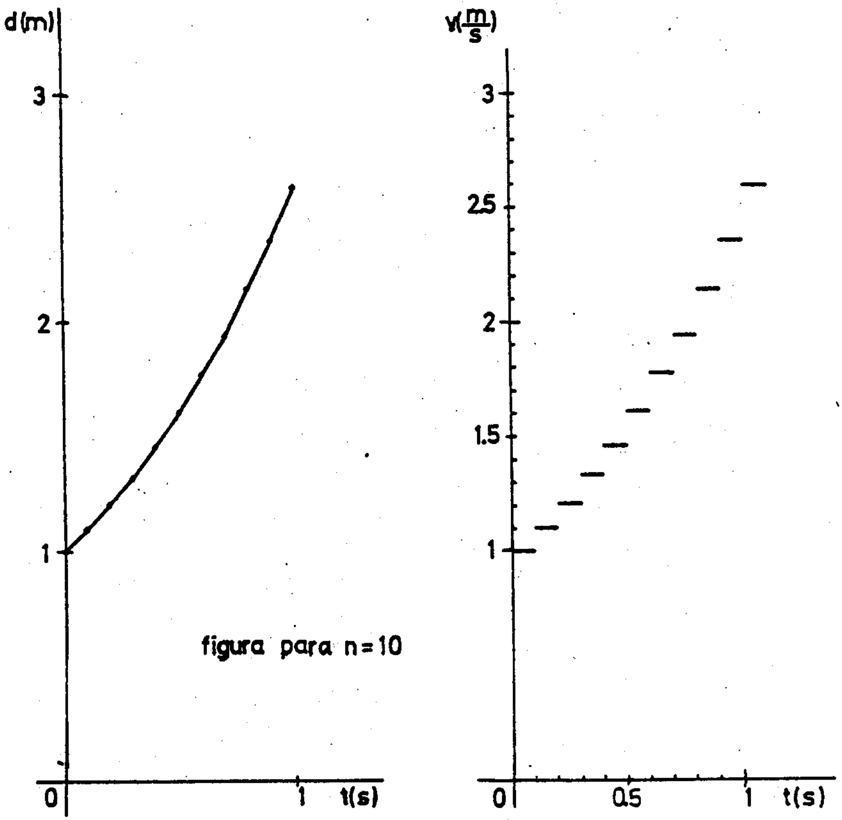


figura para n=10

t	s	d	v
0	0	1	1
(de 0 a $1/3$) $1/3$	$1 \cdot 1/3 = 1/3$	$1 + 1/3$	$1 + 1/3$
(de $1/3$ a $2/3$) $2/3$	$(1 + 1/3) \cdot 1/3$	$1 + 1/3 + (1+1/3) \cdot 1/3 =$ $= (1+1/3)^2$ (1)	$(1 + 1/3)^2$
(de $2/3$ a 1) 1	$(1+1/3)^2 \cdot 1/3$	$(1+1/3)^2 + (1+1/3)^2 \cdot$ $\cdot 1/3 = (1+1/3)^3$ (2)	$(1 + 1/3)^3$

(1): $1 + 1/3 + (1 + 1/3) \cdot 1/3 = 1 \cdot (1 + 1/3) + 1/3 \cdot (1 + 1/3) = (1 + 1/3) \cdot$
$\cdot (1 + 1/3) = (1 + 1/3)^2$

(se saca $(1 + 1/3$ factor común)

(2): $(1 + 1/3)^2 + 1/3 \cdot (1 + 1/3)^2 = (1 + 1/3)^2 \cdot (1 + 1/3) = (1 + 1/3)^3$

(se saca $(1 + 1/3)^2$ factor común)

Haz la gráfica.

Cuarta aproximación (A–*4*).– Ejercicio.

Siguiendo los modelos anteriores, ahora has de estar en condiciones de hacer la tabla correspondiente. Haz también la gráfica.

Quinta aproximación (A–5).– Ejercicio. Ver figura 5, n = 5.

Generalización:

En el estadio A–50 del proceso, ¿cuáles serían la distancia y velocidad aproximadas, al cabo de 1 segundo? (Figura n = 50).

¿Y en el estadio A–100?

¿Y en los estadios A–1000, A–10000, A–100000 y A–1000000?

En general en el estadio A–n del proceso (n es un entero cualquiera) ¿cuáles serían la distancia y velocidad aproximada. [Respuesta $(1 + 1/n)^n$]

Cálculo:

Utilizando la *calculadora* haz una recopilación de los datos obtenidos, parecida a la que sigue. (Recuerda que queremos saber la distancia a la que se hallará A al cabo de 1 segundo).

Distancia aproximada al cabo de 1 seg.:

Estadio (n)	1	2	3	....	100000	....	1000000	....
Distanc. (metros)	2	2,25	2,37		2,718268		2,7182804	

Análisis:

Calcula tantos valores sucesivos de la distancia como te sean necesarios para poder contestar con cierta seguridad a las siguientes cuestiones:

1) La sucesión de distancias, ¿es creciente? (Es decir, ¿cada término es mayor o igual que el anterior?).

2) ¿Se pone de manifiesto algún tipo de estabilidad en los dígitos de los términos de la sucesión?

3) Dirías que el proceso realizado para calcular las distancias es finito (es decir, que llega un momento en que no podemos seguir) o bien que por el contrario puede continuar indefinidamente? (Prescinde de las dificultades prácticas; se trata de si en *teoría* es posible seguir indefinidamente).

4) Es evidente que en principio podemos calcular d para cualquier entero n, y, por tanto, *para todos* los enteros, y puesto que hay infinitos enteros tendremos una sucesión infinita de distancias (formada por una cantidad infinita de números). ¿Estás de acuerdo con esta afirmación? Intenta explicarla mejor.

5) Intenta poner de manifiesto la tendencia de la sucesión. Es decir, ¿los números de la sucesión se acercan a un valor determinado? ¿Crees que en algún momento pasarán de 3?

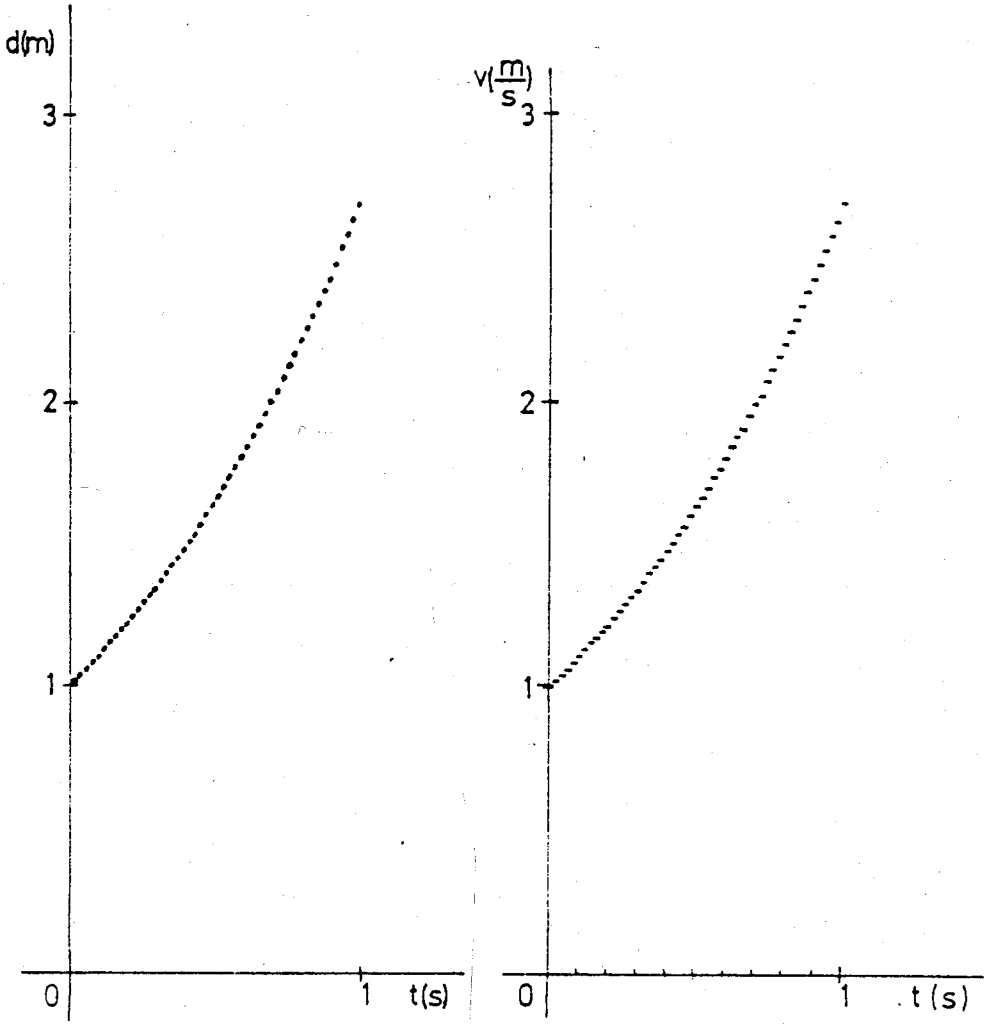
6) Si crees que la sucesión se acerca a un número concreto, propón un *nombre* para este número. (Es decir, un *símbolo* para representarlo, de la misma manera que el nombre de 3,14159... es Π).

7) Como te parece más conveniente llamar a la relación entre este número y la sucesión? Por ejemplo se podría decir que es el resultado de la sucesión, o el límite de la sucesión, o la tendencia de la sucesión, o su frontera, o su confín...

8) Intenta precisar al máximo en que consiste exactamente la relación entre este número y la sucesión. Recuerda para esto el título de nuestro método: aproximaciones sucesivas.

9) ¿Cuál sería finalmente el resultado de nuestro problema? O sea, a que distancia se encuentra A al cabo de 1 segundo.

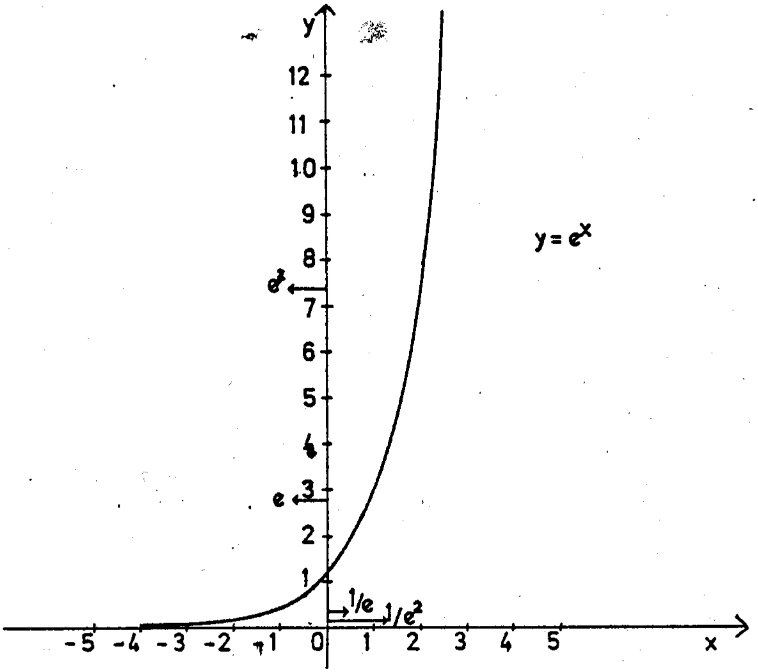
(Observación: En la medida de lo posible, a medida que el alumno hace el análisis, se ha de intentar que las generalizaciones las haga él, o como mínimo que a medida que las hace el profesor le parezcan consecuencias naturales de cada fase de su propio análisis. Sea como sea a lo largo de estas cuestiones el profesor debe explicar toda la teoría matemática de sucesiones y límites).

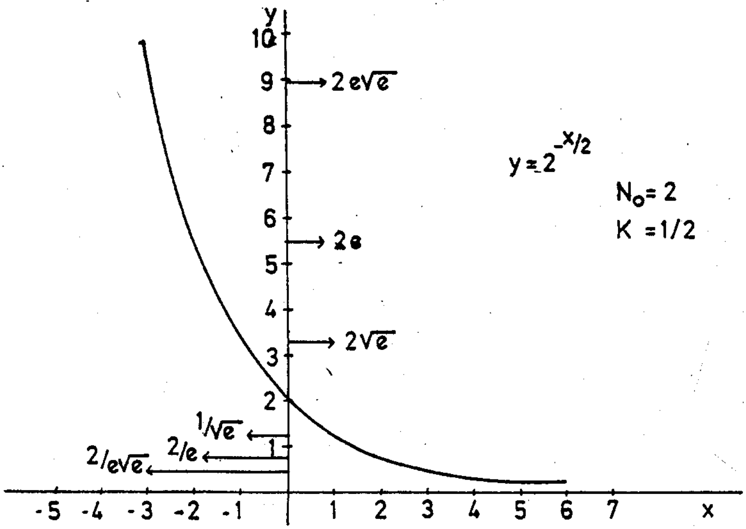


n = 5 n = 5

figura para n = 50

(Aproximación A-50)


y = e^x
e^2
e
1/e
1/e^2
x


y = 2^-x/2
N_o = 2
K = 1/2
2 e√e
2e
2√e
1/√e
2/e
2/e√e
x

SEGUNDA FASE (F-2).– FUNCION EXPONENCIAL

– Queremos saber a qué distancia se encontrara *A* al cabo de *t* segundos. (t es arbitrario).

Repasa la parte anterior F-1 para darte cuenta de que si en lugar de 1 segundo ahora son t segundos, obtenemos las siguientes tablas:

(si es necesario completa lo que sigue con tus notas y observaciones).

A-*1*.–

t	s	d	v
0	0	1	1
(de 0 a t) t	$1 \,.\, t = t$	$1 + t$	$1 + t$

A-*2*.–

t	s	d	v
0	0	1	1
(de 0 a t/2) t/2	$1 \,.\, t/2 = t/2$	$1 + t/2$	$1 + t/2$
(de t/2 a t) t	$(1+t/2) \,.\, t/2$	$1+t/2+(1+t/2).t/2=$	$(1 + t/2)^2$
		$= (1 + t/2)^2$	

A-*3*.–

t	s	d	v
0	0	1	1
(de o a t/3) t/3	$t/3$	$1 + t/3$	$1 + t/3$
(de t/3 a 2t/3) 2t/3	$(1 + t/3).t/3$	$1+t/3+(1+t/3).t/3=$	$(1 + t/3)^2$
		$= (1 + t/3)^2$	
(de 2t/3 a t) t	$(1 + t/3)^2.t/3$	$(1+t/3)^2+(1+t/3)^2.t/3=$	$(1 + t/3)^3$
		$= 1 + t/3)^3$	

– Repite ahora la generalización que se ha hecho en la 1ª fase.

Respuesta: $(1 + t/n)^n$

– En la primera fase se habrá establecido con precisión el significado de la expresión:

$$\lim_{n \to \infty} (1+ 1/n)^n = e$$

– Utilizando la calculadora, y para t = 10, asegúrate de que:

$$\lim_{n \to \infty} (1 + t/n)^n \neq e$$

Observa la siguiente tabla $d = (1 + 10/n)^n$

n	1	2	3	....	100000	....	1000000	......
d	11	36	81,37		22015,4559		22025,3645	

– De la misma forma comprueba que:

$$\lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n/t} \right)^{n/t} = e$$

Observa la siguiente tabla para $d = \left(1 + \frac{1}{n/10}\right)^{n/10}$

n	1	2	3	....	100000	....	1000000	......
d	1,2709	1,43	1,5525		2,718145		2,718268	

– Date cuenta de que:

$$(1 + t/n)^n = \left(\left[1 + \frac{1}{n/t}\right]^{n/t}\right)^t$$

y de que por tanto:

$$\lim_{n \to \infty} (1 + t/n)^n = \lim_{n \to \infty} ([1 + \frac{1}{n/t}]^{n/t})^t$$

y puesto que t es un valor constante que no varía cuando n varía, resulta que en este caso nuestra sucesión se acerca al valor:

$$e^t$$

Por tanto la distancia a la que se encuentra la galaxia A al cabo de t segundos es $d = e^t$ y su velocidad es también $v = e^t$.

A continuación se indica el proceso a seguir -igual al anterior- para obtener la expresión de otra ley física.

Repite, siguiendo las indicaciones y los cálculos hechos antes, todo el camino y desarrollado con detalle.

Ley de desintegración radioactiva

La velocidad de desintegración de una sustancia radioactiva es proporcional al número de átomos presentes en la sustancia en cada instante determinado.

Se intenta hallar el número de átomos que quedan al cabo de un tiempo t. Hazlo en dos etapas. Busca primero (F-1) los átomos que quedan al cabo de 1 segundo y después (F-2) el caso general, es decir, los átomos que quedan al cabo de t segundos.

Notación:

N_0 es el número inicial de átomos.
N el número de átomos que quedan al cabo de t segundos.
$N_0 - N$ el número de átomos desintegrados en el tiempo t.
k es la constante de proporcionalidad.
v es la velocidad de desintegración (número de átomos desintegrados por segundos).

F-1.- Atomos que quedan al cabo de 1 segundo.

Igual que antes, considera sucesivamente este segundo dividido en instantes de tiempo cada vez menores.

tiempo	átomos presentes instante anterior	átomos desintegrados (v.t)	átomos que quedan
0	N_0	0.	N_0
1	N_0	$k . N_0$	N_0-$k.N_0$=$N_0.(1$-$k)$

tiempo	átomos presentes instante anterior	átomos desintegrados (v.t)	átomos que quedan
0	N_0	0	N_0
1/2	N_0	$1/2.k.N_0$	$N_0.(1-k/2)$
1	$N_0.(1-k/2)$	$1/2.k.N_0.(1-k/2)$	$N_0.(1-k/2)^2$

En general, obtendrás que los átomos que quedan al cabo de 1 segundo -al dividir en intervalos de tiempo de longitud 1/n- son:

$$N_0 . (1 - k/n)^n$$

y por tanto:

$$N = \lim_{n \to \infty} N_0 . (1 - k/n)^n$$

Repasa la parte final anterior y verás que:

$$N = N_0 . e^{-k}$$

F–2.– Atomos que quedan al cabo de t segundos.

Repite lo mismo con un tiempo t. Llegarás a que:

$$N = \lim_{n \to \infty} N_0 (1 - k . t/n)^n$$

y por tanto obtendrás la ley de desintegración buscada que es:

$$N = N_0 . e^{-k.t}$$

Observaciones finales:

En los dos problemas hemos obtenido:

1) $d = e^t$
2) $N = N_0 . e^{-k.t}$ (N_0 y k constantes).

Normalmente en Física la variable independiente suele ser el tiempo y se representa por t. En matemáticas, una notación usual para esta variable es la letra x.

Así las anteriores expresiones se convierten en:

1) $d = e^{x}$
2) $N = N_0 \, . \, e^{-k.x}$

Análogamente, la otra variable (distancia [d] y número de átomos [N]), en Física se suele escribir con diversas letras según el fenómeno que se esté estudiando. En matemáticas es corriente designarla por la letra y.

Tenemos finalmente, pues:

1) $y = e^{x}$
2) $y = N_0 \, . \, e^{-k.x}$

Terminamos con dos gráficas de estas funciones, haciendo notar lo siguiente:

En nuestros ejemplos la x era el tiempo t. Puesto que el tiempo no puede ser negativo, las gráficas en nuestros problemas están en la parte positiva de la x (línea continua). Ahora bien, la x puede representar otras variables -aparte del tiempo- que pueden ser negativas y por tanto en general las gráficas de la parte negativa de la x (línea a trazos) también serán válidas.