LA INTRODUCCION DE LA NUMERACION (*)

Juan Rodríguez Cordobés

Colegio Pco. "J.Navarro Zamora"

Coria del Río (Sevilla)

(*) Comunicación presentada en las II Jornadas Nacionales sobre Aprendizaje y Enseñanza de la Matemática,celebradas en Sevilla en 1982.

Dentro del aprendizaje y enseñanza de las Matemáticas,hay un aspecto,el de la introducción de la numeración,que,junto con la elaboración de la escritura matemática y la utilización de material didáctico,constituye un pilar fundamental en la base matemática del alumno y que,por lo tanto,requiere una especial atención-sobre todo en los primeros niveles-para evitar que todo el ulterior trabajo caiga en un pozo sin fondo y justifique esa "natural" apatía de los niños ante esta disciplina. En lo que sigue,me referiré concretamente a lo relativo a la numeración y a la elaboración de la escritura matemática.

Considero que la didáctica de la numeración que se sigue en algunos colegios es,cuando menos,defectuosa,ya que:

.. Se sigue enseñando a "recitar" los números,incluso en el nivel preescolar. Se comienza así tratando el nivel más formal y arbitrario de la numeración,sin realizar experiencias y ejercicios previos que ayuden a descubrir el concepto de número,entendido como una propiedad de los conjuntos;el principio de conservación de la cantidad,etc (Ver "Antes del cálculo",de N.Beauverd,Ed.Capelusz).

.. Después,enseñamos a dibujar unos signos que,unilateralmente,sin haber convenido nada con los niños,decidimos que sean los números.

.. Cuando ya "saben contar" y dibujar los números hasta el cien,por ejemplo,empezamos a enseñar las operaciones.

Pues bien,con esta base,con esta falsa base,se pretende-por lo menos así se desprende de la lectura de los "Programas renovados"-introducir en el Ciclo Inicial el sistema binario de numeración.

No conozco las intenciones de quienes han elaborado estos programas ,pero supongo que el tratar un sistema diferente al decimal tiene por objeto ver como actúan los convenios matemáticos. Si esto es así -y si no lo es,las diferencias son mucho más profundas y se salen un poco del campo de la didáctica- no comprendo cómo introducen un sistema como el binario,que es,quizás,el más complicado,y lo hacen,además,sobre la deficiente base a la que he aludido.

No creo que los alumnos del C.I comprendan este sistema,si antes no se ha llevado en clase una dinámica de comprensión del concepto de número y no se ha convenido con ellos ninguna de las reglas que conforman cualquier sistema,sino que,por el contrario,hemos expuesto todo de forma absoluta y dogmática.En definitiva,veo la imposibilidad de que,sin tener una idea clara de lo que es un sistema de numeración,entiendan uno,no sólo determinado,sino de los menos asequibles.

Está claro,por lo menos para mí,que no se trata de hacerles memorizar diversos sistemas de numeración porque está de moda,y esa es la impresión que saco de la lectura de los citados programas. Creo que lo interesante es relacionar este tema con la elaboración de la escritura matemática e introducirlo,a grandes rasgos,así :

a) Realizar ejercicios destinados a la comprensión del concepto de número,a través de la propiedad de los conjuntos. Deben hacerse utilizando el más variado material:objetos diversos,los propios niños,bloques lógicos,números en color,etc.

Hay que hacer ver al niño que el número resultante de cualquier con to es una propiedad de éste. Que lo mismo que los objetos poseen propiedades como el color,la forma,etc.,los conjuntos tienen,entre otras,la propiedad numérica,es decir,la que nos dice "cuántos" objetos o elementos tiene el referido conjunto.

b) Convenir,tanto los signos como los vocablos que atribuimos a esas propiedades numéricas de los conjuntos. Creo que esto es muy importante; aunque haya quien diga que,tanto los signos como sus nombres,los tienen ya asimilados los niños cuando llegan a la escuela. Es verdad que usan en su lenguaje familiar estos vocablos e,incluso,escriben sus signos,y lo hacen de una forma empírica y espontánea;pero creo que corresponde a los maestros sistematizar este tipo de experiencias y conseguir que quede muy claro en los niños algo aparentemente insignificante. Esto :

Si a la propiedad numérica del conjunto unitario le llamamos *uno* y escribimos 1,es porque queremos,porque así lo hemos convenido;si hubiéramos querido llamarlo y escribirlo de otra forma,lo habríamos podido hacer.

c) Al llegar a la propiedad numérica del conjunto siguiente al de nueve elementos,las cosas ocurren de forma distinta : no buscamos otro signo diferente,sino un vocablo distinto. Unimos los signos representantes de los conjuntos vacío y unitario,escribimos 10 y llamamos a esto *diez*. Está claro que se trata de otra convención; la referente a la base de numeración,al patrón elegido para "medir" cualquier cantidad. Sin embargo,la actitud frente a los alumnos suele ser muy otra : pocos de nosotros "explicamos" o convenimos con ellos que las cosas después del 9 empiezan a ser de otra manera. Esto,al igual que otros muchos aspectos de las Matemáticas,es introducido de la forma más dogmática y absoluta,dando una serie de vocablos y signos que los niños tienen que ir pacientemente memorizando.

d) No empezar a operar con números superiores a la base hasta tanto los alumnos no hayan hecho un número suficiente de ejercicios,sobre todo descomposiciones de los números hasta la base en complementos y factores. Hay que asegurar la absoluta comprensión y el total dominio de los números que no sobrepasan la base.

e) Llegado el momento de introducir los números superiores a 10, se revela de nuevo la importancia de las convenciones y es preciso proceder lentamente. Así, para llegar a la notación 11 deben seguirse estos pasos :

Podemos hacer una serie de ejercicios, saliendo de la base, pero utilizando sólo los números hasta la base. Esto es perfectamente comprensible, ya que todo número es un polinomio aritmético de base diez (en nuestro caso). En su construcción entran tres operaciones que, de momento, pueden reducirse sólo a dos: adición y multiplicación. Veamos un ejemplo de estos ejercicios que propongo :

Contamos los alumnos, las mesas, sillas, regletas, etc., haciendo grupos de *diez*. Expresamos los resultados diciendo, por ejemplo : cuatro grupos de *diez* y *cero*; cinco grupos de *diez* y *tres*; etc. Después vendrá la notación operatoria ; 4.10+0 ; 5.10+3; ....Está claro que han aparecido nuevos signos (+ y .), que, al igual que los anteriores, tenemos que convenir. Es de resaltar la importancia de la terminología a emplear: es mucho más comprensible para el niño decirle "tantas veces", que "por". En cuanto a la simbología, considero preferible escribir (.) que (X), ya que no sólo el aspa le resulta más complicada de dibujar al niño, sino que existe el peligro de que la confunda con el (+).

Seguimos haciendo ejercicicios y volvemos a las regletas. Se miden, con la regleta naranja, ya que estamos en base diez, distintos trenes de regletas. Y anotamos

$$m + n + V = 2.N + b \quad \text{o bien}$$
$$8 + 7 + 6 = 2.10 + 1$$

Es de advertir, que a esta altura, ya los niños han comprendido perfectamente que podríamos utilizar como unidad de medida otra regleta cualquiera, sin que alterara el resultado.

Esta forma de anotar los resultados, es decir, de escribir los números, debe seguirse algún tiempo; no tener prisa en llegar a la notación usual. Sólo debe emplearse ésta cuando los niños hayan trabajado suficientemente con la notación técnica y hayan captado el valor de posición de cada una de las cifras que componen el número.

Otros ejemplos:

A 2.10 + 0 lo llamamos "2 veces diez,más cero".

A 3.10 + 0 lo llamamos "3 veces diez,más cero"

....

A 10.10 + 0 lo llamamos "10 veces diez,más cero".

Obsérvese que la construcción operatoria (.10 +) es constante. Sólo cuando se convenga omitirla,escribiremos 20,30,.., y diremos *veinte*, *treinta*,etc.

f) El número siguiente al 9.10+9 puede escribirse 9.10+1.10 =10.10+ +0 y,omitiendo la construcción operatoria,se nos queda en 100,que convenimos en llamar *cien*.

g) Los números inmediatos a la base(del *once* al *quince* inclusive), cuya nominación tiene que ver muy poco con su construcción,deben ser tratados al final.

Una vez adquirido por los niños el conocimiento de los números hasta la centena,es conveniente que se ejerciten en el paso de la notación técnica a la familiar y viceversa. En este aspecto,me ha dado muy buen resultado el uso del material Cuisenaire y los bloques multibase. He empleado estos últimos junto al,llamado por Noriega y Escalona,"cartel de lugar",que es en definitiva un casillero donde puede ir cada uno de los órdenes de unidades.

h) Comprendido el concepto de *centena* y habiéndolo manipulado continuamente,resulta ya fácil anotar los números comprendidos entre 100 y 1000. Como siempre,debemos empezar por escribirlos en la forma técnica y después convenir el uso de la familiar.

Es también aquí imprescindible la manipulación.Valgan como ejemplos los siguientes :

Superponiendo 10 cuadrados,llegamos a la convención de que pueden ser sustituidos por un cubo de 10 cm. de arista al que llamamos *mil* o *millar*.

Debemos establecer muchas equivalencias y para ello es muy interesante, al menos a mí me ha resultado así, el hacer un cubo hueco, de 10 cm de arista interior, donde caben exactamente diez centenas, cien decenas o mil unidades. Con él podemos construir y posteriormente llegar a la notación de cualquier número comprendido entre 1 y 1000.

Creo que todo lo anterior puede hacerse entre el segundo nivel de Preescolar y el primero de E.G.B. En segundo, o bien insistimos en estos números hasta conseguir una buena agilidad mental, o continuamos con órdenes mayores de unidades, lo que suele gustar a muchos niños.

En resumen, los pasos a seguir son :

. Conocimiento y dominio de complementos y factores con los diez primeros números, si es que empezamos con la base decimal.

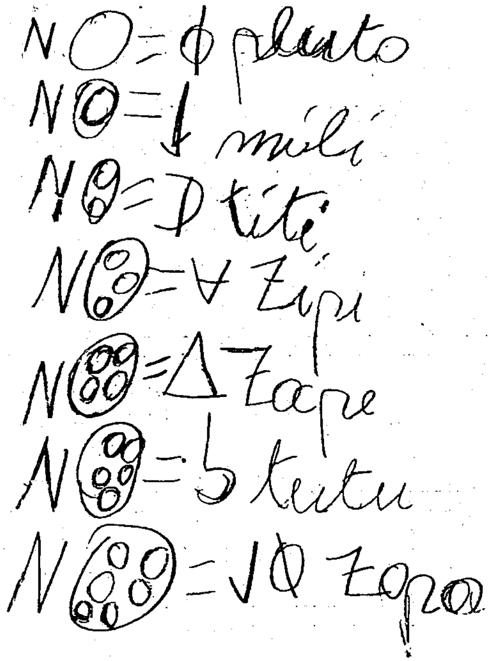
. Conocimiento de la suma y la multiplicación, ya que son las operaciones que intervienen en la construcción operatoria de un número mayor que la base.

En cuanto al problema de introducir en el Ciclo Inicial otro sistema de numeración distinto al decimal, expondré a continuación una experiencia realizada con niños de 1º de E.G.B de un colegio público de Morón de la Frontera durante el curso escolar 1973-74.

El sistema de base ZOPO.

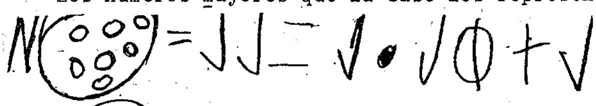
Al llegar el mes de junio y tener ya más que sobrepasado el programa, pensé en hacer una nueva experiencia en materia de numeración que me permitiera, además, medir la asimilación de lo enseñado respecto al sistema decimal. Pregunté a los niños si no estaban hartos ya de los mismos signos y los mismos nombres para los números; si no les gustaría cambiarlos e, incluso, establecer otras convenciones. La iniciativa fue muy bien acogida y empezamos el juego.

Dibujé en la pizarra un recinto que representara el conjunto vacío y pedí que "bautizaran" su propiedad numérica y eligieran un signo para ella. Inmediatamente salieron más de veinte signos y nombres diferentes. Cada uno decía que el suyo era el mejor y más bonito. Después de una lar ga discusión, propuse hacer una votación. De ella resultó el que todos aceptáramos llamarle *PLUTO* y representarlo así $\emptyset$. De igual manera procedimos para nombrar y signar los cinco números siguientes. He aquí el apunte tomado por uno de los chicos :

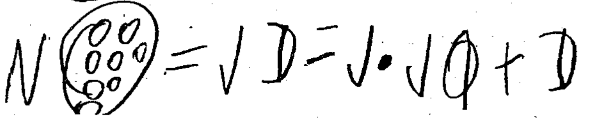


Obsérvese que no hubo necesidad de llegar al siguiente del nueve, sino que convinimos que para representar el siguiente a *TUTU*, utilizaríamos los signos representantes del conjunto unitario y del vacío y lo llamaríamos *ZOPO*. Empezamos así a trabajar en base *ZOPO* que, en realidad, es la base 6.

Los números mayores que la base los representaban y leían así :



mili veces zopo, más mili.



mili veces zopo, más titi.

Se ve en estos ejemplos que ha habido en los niños un proceso de homo logación a lo aprendido en el sistema decimal. En efecto, aunque escriben los números superiores a la base en la forma usual, inmediatamente los representan en la técnica, y es precisamente así como los leen.

A continuación, propuse ejercicios de descomposición en complementos y factores, que fueron, en general, resueltos con fortuna. Y el hecho de saber resolver sin mi ayuda ejercicios similares a los tratados en el sistema de base 10, me demostró que los alumnos habían entendido en qué consiste un sistema de numeración.

Algunos ejemplos de ejercicios y problemas en base ZOPO :

(En beneficio del lector, transcribimos, con lástima, la encantadora caligrafía infantil que aparece en el original).

1) Descompón "mili veces zopo, más zapé" en complementos y factores, de todas las maneras que se te ocurran

He aquí el trabajo de uno de los niños :

$$
\begin{aligned}
J\Delta &= J \,.\, J\emptyset + \Delta = \\
&= \Delta + J \,.\, J\emptyset = \\
&= D + D + J \,.\, J\emptyset = \\
&= D + J + J \,.\, J\emptyset + J = \\
&= J + J + D + J \,.\, J\emptyset = \\
&= \forall + J + J \,.\, J\emptyset = \\
&= \forall + J \,.\, J\emptyset + J = \\
&= J + J \,.\, J\emptyset + \forall = \\
&= J + \emptyset + J + \emptyset + J \,.\, J\emptyset + D = \\
&= J + D + J + J \,.\, J\emptyset = \\
&= D + \emptyset + \emptyset + J + J \,.\, \emptyset + J\emptyset + J = \\
&= \ldots .
\end{aligned}
$$

Es interesante observar cómo utiliza las propiedades del elemento neutro aditivo y del multiplicativo.

Los dos problemas que siguen son de texto libre,es decir,sus enunciados son producto exclusivo de la imaginación infantil.

2) *Dos hombres se fueron a la selva y vieron a un puercoespin y el puercoespin le tiró mili veces zopo más mili espigas(*espinas,quiso decir) *a uno y titi veces zopo más mili espigas al otro.¿Cuántas espigas ha tirado el puercoespin?*

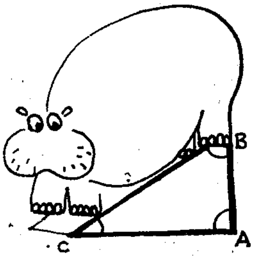
$$\begin{array}{r} J.J\emptyset + J \\ D.J\emptyset + J \\ \hline \forall.J\emptyset + D = \forall D \end{array}$$

∀D espigos ha tirado el puercoespin

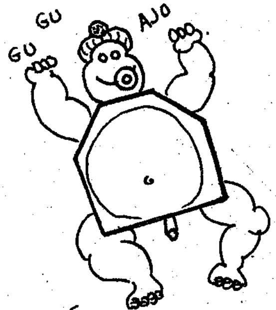
3) *Un hombre fue con un camión a matar osos y panteras muy grandes para venderlas en el pueblo. Cada oso y pantera que llevaba lo vendía a pinocho*(*) *duros. Cuando vio que en el matadero no estaban allí ni los osos ni las panteras se pusieron a buscarlas y se dieron cuenta que no las encontraban por ningún sitio,ni en el bosque.*

Cuando me presentó el problema me quedé sorprendido y,por ver cómo reaccionaba,le pregunté :¿Y las cuentas del problema,Pedro ? Y me contestó : *Pareces tonto,Juan,si no había ni osos ni panteras,! cómo va a haber cuentas!*

(*) *Pinocho* es el nombre que convinimos dar a "*tutu veces zopo,más tutu*",el equivalente "zopiano" de la centena.

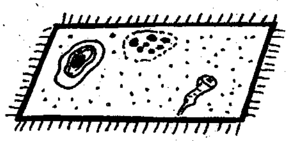


HIPOPOTENUSA

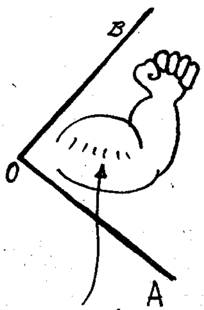


POLÍGONO CIRCUNCISO

POLÍGONO ESCRITO



PARALELOMECIO



BICEPTRIZ DE UN ÁNGULO

POLÍGONO CONCABO

Villanova

$1+\sqrt{\sqrt{9}}^{\,8-2}$