

UNA EXPERIENCIA EN 3º DE B.U.P  
UTILIZANDO LA MAQUINA DE CALCULAR

Manuel Garcia Martínez de V.

I.B de Tamanaceite

Las Palmas de Gran Canaria

INTRODUCCION

Planteemos a nuestros alumnos una simple división  $D : d$  y pidámosles que calculen el resto con la máquina. Lo más seguro es que casi ninguno lo conseguirá, ya que la calculadora no da directamente restos. Expliquémosles, entonces, cómo puede hacerse, siguiendo este proceso :

$$D = c \cdot d + r \implies r = D - c \cdot d$$

$$D : d = x_1 \longrightarrow E(x_1) = x_2 \longrightarrow x_2 \cdot d = x_3 \longrightarrow D - x_3 = y,$$

donde  $y$  es el resto entero.

Apliquemos esto ahora a un cálculo más interesante : la reducción de un ángulo al primer cuadrante; por ej.,  $2370^\circ$ . Será

$$2370 : 360 = 6,58\bar{3} \longrightarrow E(6,58\bar{3}) = 6 \longrightarrow 360 \cdot 6 = 2160 \longrightarrow y = 210^\circ$$

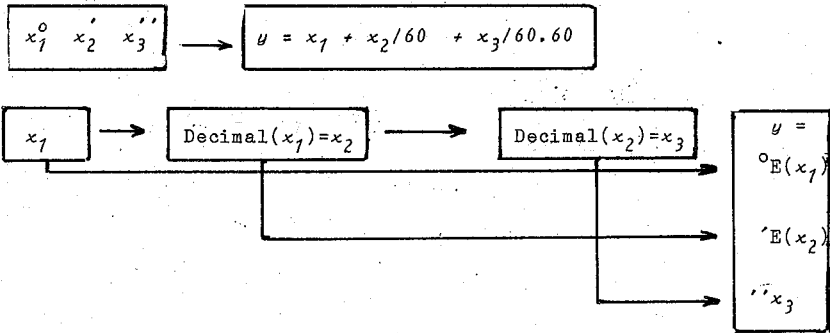
CALCULO DE UNA RAZON TRIGONOMETRICA

Los alumnos pueden reaccionar de dos formas distintas :

.. Introducir el valor del ángulo dado en su máquina, apretar la tecla correspondiente a la función buscada y esperar que, directamente, salga ésta. Si así procedieren, debe hacérseles ver que la máquina sólo está preparada para contestar respecto a ángulos que no excedan de un cierto número de vueltas; a partir de él, contestará como si la pregunta fuese errónea.

.. Poner parte decimal por divisor, pretendiendo obtener así directamente el cociente. Debe advertírseles, entonces, que no siempre esto arroja un resultado exacto.

PASO DE GRADOS, MINUTOS Y SEGUNDOS  
A FORMA DECIMAL Y VICEVERSA



ESTUDIO DE LAS FUNCIONES INVERSAS

Empecemos haciendo la siguiente prueba :

$$60^\circ \text{ sen} = 0'866\dots \quad \text{sen}^{-1} = 60^\circ$$

$$60^\circ \text{ cos} = 0'5 \quad \text{cos}^{-1} = 60^\circ$$

$$60^\circ \text{ tg} = 1'732\dots \quad \text{tg}^{-1} = 60^\circ$$

Veamos ahora con  $120^\circ$  :

$$120^\circ \text{ sen} = 0'866\dots \quad \text{sen}^{-1} = 60^\circ$$

$$120^\circ \text{ cos} = -0'5 \quad \text{cos}^{-1} = 120^\circ$$

$$120^\circ \text{ tg} = -1'732\dots \quad \text{tg}^{-1} = -60^\circ$$

¿Qué es lo que ocurre? ¿Está mal la calculadora en el segundo cuadrante? Probemos en el tercero :

$$200^\circ \text{ sen} = -0'342\dots \quad \text{sen}^{-1} = -20^\circ$$

$$200^\circ \text{ cos} = -0'939\dots \quad \text{cos}^{-1} = 160^\circ$$

$$200^\circ \text{ tg} = 0'363\dots \quad \text{tg}^{-1} = 20^\circ$$

El resultado sigue siendo insólito. ¿Qué pasará en el cuarto cuadrante? :

$$320^\circ \text{ sen} = -0'642\dots \quad \text{sen}^{-1} = -40^\circ$$

$$320^\circ \text{ cos} = 0'766\dots \quad \text{cos}^{-1} = 40^\circ$$

$$320^\circ \text{ tg} = -0'839\dots \quad \text{tg}^{-1} = -40^\circ$$

! Está mal la calculadora, o esto tiene alguna explicación ! Veamos :

En el primer cuadrante, funciona para las tres razones; en el segundo, sólo para el coseno y, en los dos últimos, para ninguno. Pero, ... un momento. !Las razones de un ángulo de  $-40^\circ$  son respectivamente iguales a las de uno de  $360^\circ - 40^\circ = 320^\circ$ ! Comprobemos con la máquina :

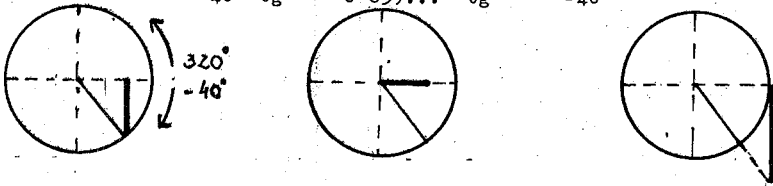
$$\begin{aligned} 320^\circ \text{ sen} &= -0'642\dots & \text{sen}^{-1} &= -40^\circ \\ -40^\circ \text{ sen} &= -0'642\dots & \text{sen}^{-1} &= -40^\circ \end{aligned} \quad (\text{Fig.1})$$

$$320^\circ \text{ cos} = 0'766\dots \quad \text{cos}^{-1} = 40^\circ \quad (\text{Fig.2})$$

¿ Por qué no "se sigue portando bien" la máquina en el caso del cos.?

Introduzcamos tangente a ver qué pasa :

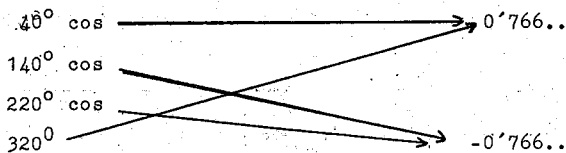
$$\begin{aligned} 320^\circ \text{ tg} &= -0'839\dots & \text{tg}^{-1} &= -40^\circ \\ -40^\circ \text{ tg} &= -0'839\dots & \text{tg}^{-1} &= -40^\circ \end{aligned} \quad (\text{Fig.3})$$



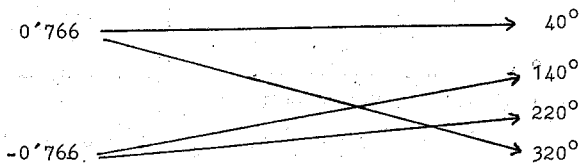
En los casos de seno y tangente, la calculadora da como respuesta el ángulo *más pequeño* que tiene la misma razón. Por qué, entonces, no contesta  $-40^\circ$  cuando se trata del coseno? Es que, como hay un ángulo positivo,  $40^\circ$ , con el mismo coseno que  $320^\circ$ , lo prefiere. Pero, ¿es qué la máquina puede elegir? Esto supondría que es inteligente; ! Sólo faltaba esto. ! Hagamos más pruebas con el coseno :

$40^\circ$				$0'766\dots$
$140^\circ$	$180^\circ - 40^\circ$			$-0'766\dots$
	Suplementarios			
$220^\circ$		$180^\circ + 40^\circ$		$-0'766\dots$
		Difieren en $180^\circ$		
$320^\circ$			$360^\circ = 320^\circ + 40^\circ$	$0'766\dots$
			Suman $360^\circ$	

Pasemos esto a un diagrama de flechas :



En la inversa ( arco coseno o  $\cos^{-1}$  ) es donde encontramos el problema. He aquí el diagrama que nos lo pone de manifiesto :



A  $-0.766$  corresponde más de un ángulo; el arco coseno no es, pues, una función. La calculadora tendría que tener dos pantallas y dos memorias distintas. Es más, tendría que tener infinitas pantallas y memorias, puesto que, para un determinado valor del coseno, existen, como sabemos,  $\alpha + 2k\pi$  ángulos.

Tenemos, por tanto, que restringir el recorrido, para que salga una sola flecha de cada valor, y dejar la interpretación a nuestro conocimiento. Veamos algunos ejemplos:

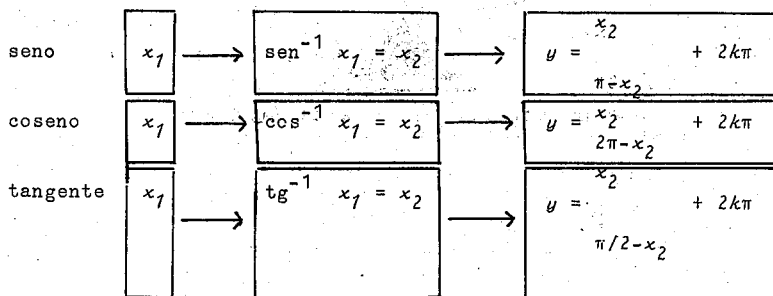
Para un  $\text{arc. cos}$  comprendido entre 0 y 1, al que corresponde un ángulo del primer cuadrante y otro del cuarto, la calculadora sólo da la respuesta relativa al primero. Si el intervalo es  $[-1, 0]$ , el resultado puede ser del segundo o del tercer cuadrante, pero la máquina se limitará a indicar el ángulo correspondiente al segundo.

En resumen :

Restringimos el campo de variación del arco coseno a

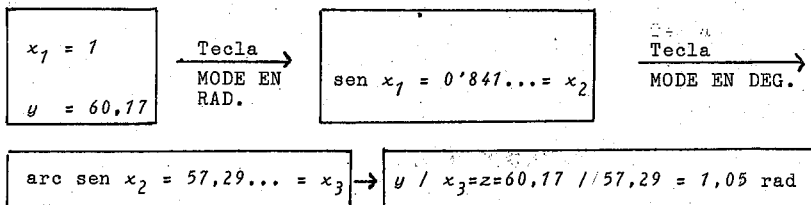
$$[0, \pi/2] \cup [\pi/2, \pi]$$

Esquematzamos, por último, la forma de actuar con los diferentes arcos :



#### PASO DEL SISTEMA SEXAGESIMAL A RADIANES

Todas las calculadoras llamadas científicas tienen una flecha con la cual se puede especificar la unidad elegida : radianes, grados sexagesimales o grados centesimales. Veamos, como ejemplo, el paso de un ángulo de  $60^{\circ},17$ , que, para mayor comodidad, escribiremos  $60,17^{\circ}$ , a radianes :





**Sociedad Canaria de Profesores de Matemáticas**

**SERIE:**

**TECNICAS DE TRABAJO INTELECTUAL APLICADAS A LA  
MATEMATICA.**

**Cuadernillo nº. 1**

**Los apuntes de Matemáticas**

**EQUIPO DE TRABAJO:**  
Luis Balbuena Castellano  
M<sup>a</sup>. Josefa Clavería Pina

Ricardo Lorenzo Pérez  
Florentina Pontejo Freire  
Pedro E. Trujillo Ascanio.