*UNA EXPERIENCIA SOBRE EL ERROR EXPERIMENTAL Y SU TRATAMIENTO MATEMATICO (*)*

Andrés Arrill López,
Fernando Hernández Guarch y
José María Limiñana Cañal .

(*) Este trabajo fue presentado al Simposio sobre "Didáctica de la Física y la Matemática : Su interrelación", que tuvo lugar en Madrid, organizado por el I.N.C.I.E, en junio de 1980.

INTRODUCCION

Indicaciones previas

La experiencia está diseñada para alumnos de Bachillerato-entre los 16 y 17 años-, pudiendo adaptarse, con breves modificaciones en el tratamiento matemático, a los distintos cursos del mismo y al C.O.U.

Conocimientos requeridos

Para realizarla en 3º de B.U.P : Cálculo aproximado con números reales, medidas estadísticas (media y desviación típica), concepto de probabilidad, principio de Arquímedes y utilización del calibre y la balanza.

Adaptada a C.O.U : Logaritmos, diferenciales, curva de probabilidad de Gauss y los relativos a Física indicados ya.

Material necesario por cada alumno o grupo

Cilindro de acero de 2 cm .3 cm aproximadamente, calibre o pie de rey, balanza, probeta, balanza hidrostática, papel milimetrado.

Presentación

La experiencia se presenta a los alumnos en tres fases diferenciadas sucesivas. En la primera se le pone frente al cilindro, cuyo volumen deben obtener, con los aparatos de medida que ya saben manejar y, sin explicaciones, se les pide que realicen el cálculo. En la segunda, debe hacerse una revisión crítica de la experiencia donde se ponga de manifiesto el concepto de error y su estudio desde un punto de vista matemático. Por último, se repite la experiencia utilizando todo el bagaje de conocimientos anteriores; se busca el volumen con métodos alternativos y se comparan y evalúan los resultados obtenidos. Como contraste de la bondad de las medidas, se calcula a partir de ellas el valor de Π.

Se ha elegido la experiencia buscando que todas las fuentes de error estén controladas, de manera que casi desaparezcan los errores no aleatorios debidos al experimentador o al ambiente; así, hemos dejado fuera la variable tiempo, más difícil de dominar, y no hay medidas cuya bondad dependa en gran parte de la habilidad de aquél.

Objetivos

Al finalizar esta experiencia, el alumno debe ser capaz de :

.. Confeccionar una tabla de datos experimentales para su tratamiento posterior.

.. Graficar los valores y aproximar su distribución.

.. Rechazar los valores extremos (o caóticos) según una norma ("criterio") estadística.

.. Distinguir entre error sistemático y aleatorio.

.. Averiguar la influencia que la precisión de la medida de cada una de las magnitudes tiene en el resultado final, eligiendo el número de cifras adecuado.

.. Determinar la precisión con que ha realizado una medida.

Advertencia al alumnado

A partir de los datos experimentales, se han descubierto muchas leyes físicas. El hecho de que estos datos vengan afectados de errores-por otra parte inevitables-, dificulta el hallazgo de la expresión matemática que exprese dicha ley. Es, por tanto, muy importante ser conscientes de la existencia de esos errores, y procurar por todos los medios minimizarlos. Sobre todo, hay que conocer el grado de imprecisión para controlarlo en todas las fases del experimento.

No todas las experiencias son tan sencillas como la que presentamos. En "Notas históricas" reseñamos dos ejemplos que muestran la habilidad del investigador y su método de trabajo.

REALIZACION DE LA EXPERIENCIA

1) Mide el diámetro y la altura del cilindro y calcula su volumen con la mayor precisión posible, aplicando la fórmula $V = \pi D h^2/4$. Vete anotando los resultados.

2) Pasa el cilindro a tu compañero para que él repita las mediciones y el cálculo. Comparad los resultados obtenidos. ¿Son todos los volúmenes iguales? ¿A qué se deben las posibles diferencias entre las medidas?

3) Estas diferencias obedecen a los inevitables errores de medición ¿Qué valor es el mejor de todos? Seguramente unos miembros del grupo habrán medido por exceso y otros por defecto. Parece natural intentar compensar esto tomando como mejor medida la media aritmética de todas; en efecto, se puede demostrar que es la mejor estimación del valor verdadero. Compara esta media con las de los otros grupos.

4) La dispersión de los valores alrededor de la media se puede medir buscando la desviación típica. Hazlo. Compara las desviaciones típicas y podrás saber qué grupo ha valorado la medida con mayor precisión, esto es, con menor desviación típica.

APLICACION ESTADISTICA

1) Repite cinco veces cada medida y rellena el siguiente estadillo:

	1a.	2a.	3a.	4a.	5a.
D					
h					
V					

2) Con las veinticinco medidas del grupo, forma una tabla de frecuencias (una por cada magnitud). Toma como intervalo la precisión del aparato.

Representa la tabla mediante un histograma en la hoja de papel milimetrado. Une los puntos medios de la base superior de los polígonos con una línea sin picos. Debes obtener una curva parecida a la representada en la fig.1.

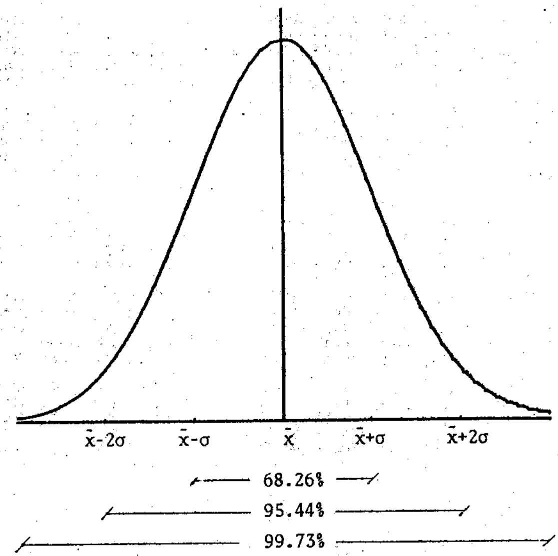

Figura 1. Gráfica de la distribución normal (0,1)

3) Esta curva se conoce con el nombre de *campana de Gauss*, ya que fue *Carl Friederich Gauss* quien la estudió, precisamente para un problema de errores, cuya solución condujo al descubrimiento de la órbita de CERES.

El nombre de la función característica que la define es *distribución normal*, y aparece siempre que, como en nuestro caso de los errores, la medida se puede suponer influenciada por muchas pequeñas causas. Al ser una función difícil de tratar $\left(y = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \right)$, se ha tabulado para el caso en que la media es 1 y la desviación típica es 0. Adjuntamos la correspondiente tabla,donde puedes ver cuál es la proporción de medidas que debes esperar en cada segmento del gráfico:

TABLA DE LA DISTRIBUCION NORMAL (O,1)

Z_a	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
0.0	.5000	.4960	.4920	.4880	.4840	.4801	.4761	.4721	.4681	.4641
0.1	.4602	.4562	.4522	.4483	.4443	.4404	.4364	.4325	.4286	.4247
0.2	.4207	.4168	.4129	.4090	.4052	.4013	.3974	.3936	.3897	.3859
0.3	.3821	.3783	.3745	.3707	.3669	.3632	.3594	.3557	.3520	.3483
0.4	.3446	.3409	.3372	.3336	.3300	.3264	.3228	.3192	.3156	.3121
0.5	.3085	.3050	.3015	.2981	.2946	.2912	.2877	.2843	.2810	.2776
0.6	.2743	.2709	.2676	.2643	.2611	.2578	.2546	.2514	.2483	.2451
0.7	.2420	.2389	.2358	.2327	.2296	.2266	.2236	.2206	.2177	.2148
0.8	.2119	.2090	.2061	.2033	.2005	.1977	.1949	.1922	.1894	.1867
0.9	.1841	.1814	.1788	.1762	.1736	.1711	.1685	.1660	.1635	.1611
1.0	.1587	.1562	.1539	.1515	.1492	.1469	.1446	.1423	.1401	.1379
1.1	.1357	.1335	.1314	.1292	.1271	.1251	.1230	.1210	.1190	.1170
1.2	.1151	.1131	.1112	.1093	.1075	.1056	.1038	.1020	.1003	.0985
1.3	.0968	.0951	.0934	.0918	.0901	.0885	.0869	.0853	.0838	.0823
1.4	.0808	.0793	.0778	.0764	.0749	.0735	.0721	.0708	.0694	.0681
1.5	.0668	.0655	.0643	.0630	.0618	.0606	.0594	.0582	.0571	.0559
1.6	.0548	.0537	.0526	.0516	.0505	.0495	.0485	.0475	.0465	.0455
1.7	.0446	.0436	.0427	.0418	.0409	.0401	.0392	.0384	.0375	.0367
1.8	.0359	.0351	.0344	.0336	.0329	.0322	.0314	.0307	.0301	.0294
1.9	.0287	.0281	.0274	.0268	.0262	.0256	.0250	.0244	.0239	.0233
2.0	.0228	.0222	.0217	.0212	.0207	.0202	.0197	.0192	.0188	.0183
2.1	.0179	.0174	.0170	.0166	.0162	.0158	.0154	.0150	.0146	.0143
2.2	.0139	.0136	.0132	.0129	.0125	.0122	.0119	.0116	.0113	.0110
2.3	.0107	.0104	.0102	.00990	.00964	.00939	.00914	.00889	.00866	.00842
2.4	.00820	.00798	.00776	.00755	.00734	.00714	.00695	.00676	.00657	.00639
2.5	.00621	.00604	.00587	.00570	.00554	.00539	.00523	.00508	.00494	.00480
2.6	.00466	.00453	.00440	.00427	.00415	.00402	.00391	.00379	.00368	.00357
2.7	.00347	.00336	.00326	.00317	.00307	.00298	.00289	.00280	.00272	.00264
2.8	.00256	.00248	.00240	.00233	.00226	.00219	.00212	.00205	.00199	.00193
2.9	.00187	.00181	.00175	.00169	.00164	.00159	.00154	.00149	.00144	.00139

4) Si tienes alguna medida que se aleje de la media en más de tres veces la desviación típica,puedes rechazarla. Sólo se debe presentar tres veces cada diez mil y,si se ha presentado en veinticinco mediciones,podemos pensar que se trata de un error "extremo" ("caótico"),es decir,debido a alguna distracción o despiste. Si ese es tu caso,debes rehacer,sin esa medida,todos los cálculos,para hallar la media y la desviación típica. ! Los despistes suelen acarrear trabajo !

5) Si la aproximación de tu gráfico a una campana es buena,puedes admitir que la media es el verdadero valor de la cantidad buscada;al menos,el mejor valor que puedes obtener. El resultado de la medición se suele expresar así :

$$\mu \in \bar{x} \pm \frac{s}{\sqrt{n}} ,$$

donde μ es el verdadero valor; $\bar{x}$,la media obtenida;s,la desviación típi ca y n, el número de medidas.

Si quieres perfeccionar la expresión, puedes valerte de la tabla normal y tendrás

$$\mu \in \bar{x} \pm \frac{s}{\sqrt{n}}$$, con una probabilidad del 68'26%

$$\mu \in \bar{x} \pm 2\frac{s}{\sqrt{n}}$$, con una probabilidad del 95'44%

$$\mu \in \bar{x} \pm 3\frac{s}{\sqrt{n}}$$, con una probabilidad del 99'73%

Parece, según esto, que si queremos aumentar la precisión de la medida, debemos aumentar el número de estas. Y es cierto, pero con alguna limitación. En efecto, al aumentar n, disminuiremos el valor del cociente $s/\sqrt{n}$; pero no tiene sentido pensar que si hacemos n=10.000, por ejemplo, podemos obtener mayor precisión que el límite impuesto por el instrumento de medida. Por ello, se aconseja tomar sólo hasta una cifra más que en las medidas particulares hechas.

INFLUENCIA DE LAS DISTINTAS MAGNITUDES EN EL RESULTADO FINAL

Se determina así :

1) Se toman logaritmos en la fórmula del volumen; se diferencia-considerando como variable Π^*, pues no sabemos aún con cuántas cifras hemos de tomar Π y, finalmente, se suman todos los términos considerados positivos. Esto es, partiendo de

$$V = \Pi R^2 h = \Pi (D/2)^2 h = \Pi . D^2/4 \ .h \ ,$$

se llega a

$$dV/V = d\Pi^*/\Pi^* + 2 . dD/D + dh/h \ ,$$

es decir, que "*la medida del diámetro influye en la precisión del volumen con doble peso que la medida de la altura*".

2) Ejemplo.

Para $h=3'21 \pm 0'01$ (la apreciación del calibre es de décima de mm) y $D=2'03 \pm 0'01$, han resultado las siguientes precisiones de medida:

$$dh/h = 0'01/3'21 = 0'0031 \simeq 0'3 \ \%$$

$$dD/D = 0'01/2'03 = 0'00492 \simeq 0'5 \ \%$$

Por lo tanto,la precisión del volumen será,como máximo

$$dV/V = 2.dD/D + dh/h = 2 . 0'5\ \% + 0'3\ \% = 1'3\ \%$$

3) En consecuencia,¿con cuántas cifras hemos de tomar Π? Veamos. El número de cifras ha de ser tal que

$$d\Pi^*/\Pi^* = 0'01\ \% = 0'0001$$ y,por tanto,

$$d\Pi^* = 0'0001\ .\ \Pi^* = 0'00031415.......$$,es decir,

$$\Pi = 3'141 \pm 0'001$$

4) Estamos ya en condiciones de asegurar que la precisión en la medida del volumen es

$$dV/V = 0'01\ \% + 2\ .\ 0'5\ \% + 0'3\ \% = 1'31\%$$

En este 1'31% , hay un 1% de imprecisión debido a la medida de del diámetro,un 0'3 % por la de la altura y el 0'01 % restante se debe a Π.

Si hubiésemos tomado $\Pi = 3'1415 \pm 0'0001$, hubiera resultado un 1'303 % de precisión,lo que no constituye una mejora apreciable.

5) Resumen :

Si se obtienen los datos experimentales con 2 cifras decimales,hay que tomar Π con no menos de 2 ni más de 3. Así,tomando Π=3'14,la contribución a la imprecisión final es como la de h ; si es Π=3'141 ,la influencia de Π en dicha imprecisión final es despreciable.

El cuidado máximo ha de tenerse,pues,en la medida del diámetro,que influye en la imprecisión total más que la altura,por el exponente de la expresión $V = \Pi R^2 h$.

MEDIDAS ALTERNATIVAS. COMPARACION

Ahora,vamos a calcular el volumen de nuestro cilindro,de densidad 7'8 g/cm^3 (acero),por otros dos procedimientos.

1º) Mediante la balanza,determina su masa y anota el resultado.Pásalo a otros compañeros y obtén la media de todas las medidas.Aplica entonces la fórmula $d = M/V$ y calcula el volumen.

¿Te parece que con este método obtendrás mayor precisión que con el anterior? Realiza los cálculos necesarios para averiguar la precisión de la medida y la influencia que en ella tiene cada una de las medidas. Ten cuidado con los signos. Recuerda que los errores siempre se suman. Consulta el Apéndice.

¿Sería más precisa la medida con una balanza que apreciara miligramos? ¿Qué habría que hacer entonces para aumentar la precisión?

Como habrás observado, este método no es más preciso que el anterior y se debe, fundamentalmente, a que la densidad lleva una imprecisión de un 1'3 % aproximadamente (¿por qué?), lo que inutiliza la mayor precisión de la balanza. (Cálcúlala y comprueba que vale 0'0013 % aproximadamente)

2º) Utiliza ahora la balanza hidrostática para hallar el volumen del cilindro. Equilibra éste, que está colgado de uno de los platillos y en el interior de una probeta. Añade agua destilada hasta cubrir completamente el cilindro. Consigue nuevamente el equilibrio de la balanza, añadiendo las pesas necesarias en el platillo. El número de gramos de estas pesas, mide el volumen buscado en cm^3. ¿Por qué?

Este procedimiento es más preciso que los anteriores, ya que únicamente se ve afectado por la imprecisión de la balanza que, por otra parte, es el instrumento más preciso de los utilizados.

CONCLUSIONES Y SUGERENCIAS

.. El resultado es más impreciso que el más impreciso de los datos.

.. Las magnitudes que van a ser medidas o calculadas están relacionadas por una fórmula matemática. La influencia que cada una de ellas va a tener en la precisión del resultado es, por lo tanto, una cuestión matemática, que no física.

.. La precisión con que cada magnitud va a ser medida, depende del aparato utilizado. Si han de emplearse varios, han de ser de precisiones análogas, pues la imprecisión mayor es la que pasa al resultado final.

.. Si los errores son aleatorios, el histograma debe aproximarse a una curva de Gauss. Si no lo fuesen, las implicaciones estadísticas utilizadas no tendrían validez.

Se te sugiere que, tomando como medida para el volumen la obtenida con mayor precisión, y partiendo de la fórmula $V = \Pi/4\, D^2 h$, calcules el valor para Π y lo compares con el verdadero (3'141592...). Para D y h, toma los valores medios obtenidos en la primera parte de la experiencia.

Si deseas mayor precisión para Π, tendrías que medir D y h con precisiones muy superiores a las que podrían darte los aparatos de medida utilizados.

NOTAS HISTORICAS

Veamos un ejemplo donde la experimentación juega un papel principal, pero los errores no son importantes. De hecho, solamente se toma una precaución elemental- dejar un testigo al pie de la montaña -para asegurar la no influencia de causas externas "no controladas".

Se transcriben a continuación algunos párrafos de "*Filosofía de la Ciencia Natural*", de CARL G. HEMPEL :

" *En la época de Galileo, y probablemente mucho antes, se sabía que una bomba aspirante que extrae agua de un pozo por medio de un pistón que se puede hacer subir por el tubo de la bomba, no puede elevar el agua arriba de 34 pies por encima de la superficie del pozo. Galileo se sentía intrigado por esta limitación y sugirió una explicación, que resultó, sin embargo, equivocada. Después de la muerte de Galileo, su discípulo Torricelli propuso una nueva respuesta. Argüía que La Tierra está rodeada por un mar de aire, que, por razón de su peso, ejerce presión sobre la superficie de aquélla, y que esta presión ejercida sobre la superficie del pozo obliga al agua a ascender por el tubo de la bomba cuando hacemos subir el pistón. La altura máxima de 34 pies de la columna de agua expresa simplemente la presión total de la atmósfera sobre la superficie del pozo.*

Evidentemente, es imposible determinar, por inspección u observación directa, si esta explicación es correcta, y Torricelli la sometió a contrastación por procedimientos indirectos. Su argumentación fue la siguiente : Si la conjetura es verdadera, entonces la presión de la atmósfera sería capaz también de sostener una columna de mercurio proporcio-

nalmente más corta; además, puesto que la gravedad específica del mercurio es aproximadamente 14 veces la del agua, la longitud de la columna de mercurio mediría aproximadamente 34/14 pies, es decir, algo menos de dos pies y medio. Comprobó esta implicación contrastadora por medio de un artefacto ingeniosamente simple, que era, en efecto, el barómetro de mercurio. El pozo de agua se sustituye por un recipiente que contiene mercurio; el tubo de la bomba aspirante se sustituye por un tubo de cristal cerrado por un extremo. El tubo está completamente lleno de mercurio y queda cerrado apretando el pulgar contra el extremo abierto. Se invierte después el tubo, el extremo abierto se sumerge en el mercurio, y se retira el pulgar; la columna de mercurio desciende entonces por el tubo hasta alcanzar una altura de 30 pulgadas; justo como lo había previsto la hipótesis de Torricelli.

Posteriormente, Pascal halló una nueva implicación contrastadora de esta hipótesis. Argumentaba Pascal que si el mercurio del barómetro de Torricelli está contrapesado por la presión del aire sobre el recipiente abierto de mercurio, entonces la longitud de la columna disminuiría con la altitud, puesto que el peso del aire se hace menor. A requerimiento de Pascal, esta implicación fue comprobada por su cuñado, Périer, que midió la longitud de la columna de mercurio al pie del Puy-de-Dôme, montaña de unos 4800 pies, y luego transportó cuidadosamente el aparato hasta la cima y repitió la medición allí, dejando abajo un barómetro de control supervisado por un ayudante. Périer halló que en la cima de la montaña la columna de mercurio era más de tres pulgadas menor que al pie de aquella, mientras que la longitud de la columna en el barómetro de control no había sufrido cambios a lo largo del día ".

Las experiencias físicas deben ser siempre repetibles. En ocasiones, algún experimento exige tanta habilidad por parte del investigador, que esto dificulta su "repetibilidad". Un ejemplo de esto puede leerse a continuación.

" Tomemos como ejemplo la hipótesis de que las cargas eléctricas

tienen una estructura atómica y son todas ellas múltiplos enteros de la carga del átomo de electricidad, el electrón. Los experimentos llevados a cabo a partir de 1909 por R.A. Millikan prestaron a esta hipótesis un apoyo notable. En estos experimentos, la carga eléctrica de una gota extremadamente pequeña de algún líquido tal como el aceite o el mercurio, se determinaba midiendo las velocidades de las gotitas al caer por el influjo de la gravedad o al elevarse bajo la influencia de un campo magnético que actuaba en dirección opuesta. Millikan observó que todas las cargas eran, o bien iguales a una cierta carga mínima básica, o bien múltiplos enteros de esta misma carga mínima, que él entonces identificó con la carga del electrón. Sobre la base de numerosas mediciones muy cuidadosas, dio su valor en unidades electrostáticas : $4'774 \cdot 10^{-10}$. Esta hipótesis fue pronto discutida desde Viena por el físico Ehrenhaft, quien anunció que había repetido el experimento de Millikan y había encontrado cargas que eran considerablemente menores que la carga electrónica especificada por Millikan. En su discusión de los resultados de Ehrenhaft, Millikan sugirió varias fuentes posibles de error-es decir, violaciones de los requisitos de la contrastación-que podían explicar los resultados empíricos, aparentemente adversos, de Ehrenhaft : evaporación durante la observación, que haría disminuir el peso de una gota; formación de una película de óxido en las gotas de mercurio utilizadas en algunos de los experimentos de Ehrenhaft; influencia perturbadora de partículas de polvo suspendidas en el aire; desviación de las gotas del foco del telescopio utilizado para observarlas; pérdida, por parte de muchas de las gotas, de la forma esférica requerida; errores inevitables en el cronometraje de los movimientos de las pequeñas partículas. Con respecto a dos partículas "aberrantes" observadas y registradas por otro investigador, Millikan concluye : La única interpretación posible en lo que se refiere a esas dos partículas, es que no eran esferas de aceite, sino partículas de polvo. Millikan observa después que los resultados de repeticiones más precisas de su propio experimento estaban todos esencialmente de acuerdo con el resultado que él había anunciado de antemano. Ehrenhaft *continuó durante muchos años defendiendo y ampliando sus datos concernientes a las cargas subelectrónicas; pero hubo otros físicos que no fueron, en general, capaces de reproducir sus resultados, y la concepción atomística de la carga eléctrica se mantuvo. Se descubrió más tarde, sin embargo, que el valor numérico que Millikan dio para la carga electrónica pecaba ligeramente por defecto; interesante es señalar que la desviación era debida a un error en una de las propias hipótesis auxiliares de Millikan : ! Había utilizado un valor demasiado bajo para la viscosidad del aire al evaluar los datos relativos a su gota de aceite !* ".

APENDICE

Dada la función $y = f(x)$, se demuestra que $\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y/dy = 1$. Esto nos permite utilizar la igualdad aproximada $\Delta y \simeq dy$, siempre que Δx sea suficientemente pequeño.

Teniendo en cuenta que los errores cometidos en las medidas físicas han de ser muy pequeños en comparación con las mismas (Δx despreciable frente a x), podemos sustituir los incrementos por diferenciales en el cálculo de errores. Esto simplifica los cálculos y los hace más directos

Se define el *error absoluto* (Δx) de una medida, como la diferencia en valor absoluto entre el verdadero valor de la misma (x desconocido) y el valor experimental hallado(x_0) : $\Delta x = | x - x_0 |$. Ahora bien, puesto que físicamente no podemos conocer el verdadero valor de la medida(x), tampoco podemos conocer los valores de la variable Δx. Lo que sí es conocido es el límite superior del error absoluto, que viene determinado por la más pequeña fracción que aprecia el aparato de medida.

Se define el *error relativo* ($\Delta x/x$) de una medida, como el cociente entre el error absoluto y el verdadero valor : $\Delta x/x = | x - x_0 | / x$. Como obviamente es desconocido, utilizamos el límite superior como precisión o porcentaje de la medida.

El cálculo diferencial ha de ser utilizado con ciertas reservas, debiendo acompañar el mismo signo a todas las diferenciales. Esto es debido a que el límite superior de error ha de cubrir el caso más desfavorable,es decir,aquél en que todos los riesgos se sumen.

BIBLIOGRAFIA :

RIOS,SIXTO . Métodos estadísticos . Madrid,Ediciones del Castillo, 6ª ed.,1974.

REY PASTOR,J . Teoría de funciones . Madrid,1966.

PISKUNOV,N . Cálculo diferencial e integral . Barcelona,Montaner y Simón,1970.

SHCHIGOLAR,B.M . Mathematical analysis of observations . New York, London Llife Brooks Ltd.New York American Elverier Publishing Company Inc.,1965.

VELIKANOR,M.A . Measurement errors and empirical relatios . Jerusalem,Israel. Program for scientific translations,1965.

HEMPEL,C.G . Filosofía de la Ciencia Natural . Madrid,1973 . Alianza Universal.

SOCIEDAD CANARIA DE PROFESORES DE MATEMATICAS

SERIE:

TECNICAS DE TRABAJO INTELECTUAL APLICADAS A LA MATEMATICA

CUADERNO N° 2:

¿COMO REALIZAR EL ACTO DE ESTUDIAR LAS MATEMATICAS?

EQUIPO DE TRABAJO:
Luis Balbuena Castellano

(DIBUJOS)
Mª Josefa Claveria Pina
Ricardo Lorenzo Pérez
Gabino Medina Martín
Florentina Pontejo Freire
Pedro E. Trujillo Ascanio