BICENTENARIO DE LA MUERTE DE

LEONARD EULER

(1707—1783)

Manuel de Armas Cruz
I.B. "MENCEY ACAYMO"
Güimar-Tenerife

Juan Antonio García Cruz
C.E.I. de La Laguna
Tenerife

El 18 de Septiembre de 1783 murió en Petrogrado LEONARD EULER. El próximo Septiembre se cumplirán, por tanto, doscientos años. Queremos traer desde nuestra revista el recuerdo de uno de los más grandes matemáticos de todos los tiempos.

Nació EULER en la ciudad suiza de Basilea el 15 de Abril de 1707. Sus padres, Marguerite Bruker y Paul Euler, se trasladaron, a poco de nacer Leonard, a Riechen, una aldea cerca de Basilea. Paul Euler, pastor calvinista, estudió en su juventud Matemáticas con Jacob Bernouilli.

LEONARD estudió Matemáticas con otro miembro de la familia Bernouilli, Johannes, que descubrió pronto las extraordinarias dotes que el joven EULER poseía.

El año de la muerte de Newton (1727), la Academia de París propuso como problema del año el de las arboladuras de los barcos. EULER, que tenía entonces veinte años, presentó un trabajo que, si bien no ganó el premio, recibió una mención honorífica. Fue éste su primer trabajo matemático. En ese mismo año, aceptó la invitación de los hermanos Daniel y Ni colaus Bernouilli, hijos de Johannes, para unirse a ellos en la Academia de San Petersburgo. Esta y la Academia de Berlín, a la que también perteneció EULER, fueron creadas siguiendo los planes de Leibnitz de fundar centros que se dedicaran a la investigación pura y aplicada de las Ciencias.

EULER fue el escritor matemático más prolífico del siglo XVIII y, posiblemente, de la historia. A lo largo de su vida vieron la luz 530 memorias sobre los campos más diversos de la Matemática y de la Ciencia en general. Después de su muerte se han descubierto otros 356 manuscritos que se le atribuyen. Escribió también libros de texto, que le servían también para dar a conocer sus descubrimientos e innovaciones.

En 1736, próxima a cumplir un siglo de publicada la Geometría Analítica de Descartes, publica su MECHANICA, SIRVE MOTUS SCIENTIAE ANALYTICE EXPOSITA, libro en que se desarrolló por vez primera la teoría de Newton sobre la dinámica de un punto material con métodos analíticos, es decir, aplicando el Cálculo infinitesimal desarrollado por Newton y Leibnitz. Esta obra marca el comienzo de la Mecánica como ciencia moderna. En ella aparece por primera vez la letra e para designar la base de los logaritmos naturales ; en este corolario :

" 171. Si bien en la precedente ecuación la fuerza p no actúa, su dirección todavía persiste, la cual depende de la razón de los elementos dx y dy. Dada, por tanto, la dirección de la fuerza que mueve al punto y la curva a lo largo de la cual se mueve, uno puede, con sólo estos datos, derivar la velocidad del punto en cualquier lugar, pues será

$$\frac{dc}{c} = \frac{dy\ ds}{z\ dx} \quad \text{o} \quad c = e^{\int \frac{dy\ ds}{z\ dx}} \text{ "}$$

En 1748 escribe "INTRODUCTIO IN ANALYSIN INFINITORUM", en cuya primera parte encontramos la mayoría de los conocimientos sobre Algebra, teoría de ecuaciones y Trigonometría que hoy se enseñan en los cursos elementales de estas materias. Aparecen con una notación casi moderna; es más, nuestra notación es, con pequeñas variantes, la empleada por EULER.

EULER establece en esta obra, por primera vez, la relación entre la función exponencial "imaginaria" e^{xi} y las funciones circulares sen x y cos x, $e^{xi} = \cos x + i \operatorname{sen} x$, ya conocida por Johannes Bernouilli. Al respecto escribe :

" 138. Póngase de nuevo en las fórmulas §133 arco z infinitamente pequeño y sea n el número infinitamente grande i, para que iz obtenga el valor finito v. Será, por consiguiente, nz=v y z=v/i, de donde sen z=v/i y cos z=1. Sustituyendo da

$$\cos v = \frac{\left(1 + \frac{v\sqrt{-1}}{i}\right)^{i} + \left(1 - \frac{v\sqrt{-1}}{i}\right)^{i}}{2}$$

$$\operatorname{sen} v = \frac{\left(1 + \frac{v\sqrt{-1}}{i}\right)^{i} - \left(1 - \frac{v\sqrt{-1}}{i}\right)^{i}}{2\sqrt{-1}}$$

En el capítulo precedente hemos visto que $\left(1 + \frac{z}{i}\right)^{i} = e^{z}$ donde e denota la base de los logaritmos hiperbólicos. Escribiendo en lugar de z, primeramente $+v\sqrt{-1}$ y luego $-v\sqrt{-1}$, tendremos

$$\cos v = \frac{e^{+v\sqrt{-1}} + e^{-v\sqrt{-1}}}{2}$$

$$\operatorname{sen} v = \frac{e^{+v\sqrt{-1}} - e^{-v\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}}$$

De aquí se ve como las cantidades exponenciales imaginarias se reducen a seno y coseno de arcos reales; esto es

$$e^{+v\sqrt{-1}} = \cos v + \sqrt{-1} \operatorname{sen} v$$

$$e^{-v\sqrt{-1}} = \cos v - \sqrt{-1} \operatorname{sen} v \quad "$$

Si en la primera de estas dos últimas fórmulas sustituimos v *por* π, *obtenemos, en notación moderna, la relación* $e^{\pi i} = -1$ *ó la equivalente* $e^{\pi i} + 1 = 0$ *, que relaciona extrañamente la unidad real 1, la unidad imaginaria i, el cero y los números trascendentes e y* π.

EULER establece una relación equivalente en su artículo " DE LA CONTROVERSE ENTRE MRS. LEIBNITZ ET BERNOUILLI SUR LES LOGARITHMES DES NOMBRES NEGATIFS ET IMAGINAIRES ", donde, en la página 163, dice :

" .....todos los logaritmos de la fórmula $\cos\alpha + \sqrt{-1}\ \operatorname{sen}\alpha$ están incluidos en la fórmula general

$$\ell\,(\cos\alpha + \sqrt{-1}\ \operatorname{sen}\alpha) = (\alpha + p\pi)\sqrt{-1}$$

donde p es un número par, positivo o negativo e, incluso, cero. De esto deducimos

$$\ell\ -1 = (1+p)\ \pi\ \sqrt{-1} = q\ \pi\ \sqrt{-1}\ ,$$

con q impar. Se tiene, por tanto,

$$\ell\,-1 = \pm\pi\sqrt{-1}\ ;\ \pm 3\pi\sqrt{-1}\ ;\ \pm 5\pi\sqrt{-1};\ \text{etc.}"$$

En 1755 publica " INSTITUTIONES CALCULI DIFFERENTIALIS " y en el periodo 1768-74 aparece su obra en tres volúmenes " INSTITUTIONES CALCULI INTEGRALIS " . En ellas encontramos el cáculo diferencial e integral, una teoría sobre ecuaciones diferenciales-cuya clasificación en lineales, exactas y homogéneas siguen todavía los textos elementales-, el teorema de Taylor con muchas aplicaciones y las integrales eulerianas Γ *y B.*

EULER no sólo tuvo aciertos; también cometió errores. Entre ellos, deducir de $n+n^2+\ldots = n/(1-n)$ *y* $1+1/n+1/n^2 = n/(n-1)$ *que*

$$1/n^2 + 1/n + 1 + n + n^2 + \ldots = 0$$

O este otro :

$$1 - 3 + 5 - 7 + \ldots\ldots = 0$$

Pero, teniendo en cuenta que en el siglo XVIII no habían sido aún establecidos los fundamentos del Cálculo, y que los procesos infinitos de suma y producto se manejaban con mucha ligereza-debido a que no se tenían los criterios de convergencia y divergencia de series-, tales fallos pueden ser disculpados.

En Teoría de números, EULER realizó también incursiones fecundas.

He aquí algunos ejemplos :

Desde un punto de vista elemental, el establecimiento de la fórmula polinómica

$$n^2 - 79\,n + 1601 ,$$

con valores de n desde 0 hasta 79, para la obtención de números primos.

En 1760 resuelve el problema de encontrar una fórmula para determinar el número de enteros positivos, menores que uno dado n y primos con éste. Así : Si $n = p_1^{a_1}\ p_2^{a_2} \ldots p_r^{a_r}$, donde $p_1, p_2, \ldots, p_r$ son números primos, entonces, la función $\Phi(n)$, denominada hoy "función de Euler", da el número buscado, y es

$$\Phi(n) = n(1-1/p_1)\ (1-1/p_2) \ldots (1-1/p_r)$$

En las páginas que siguen presentamos tres trabajos de EULER. El primero es la famosa memoria sobre la solución del problema de los puentes de Königsberg, considerada como uno de las primeras aportaciones a la Teoría de grafos. En ella, EULER no sólo resuelve el problema, si no que explica el método seguido, algo hoy día olvidado por los matemáticos al presentar sus trabajos al público.

El segundo es la solución a un problema de Teoría de números : la demostración de que todo número es suma de cuatro cuadrados. Aunque no es una obra rigurosa desde el punto de vista moderno, ilustra bien los métodos empleados durante el s. XVIII en Teoría de números.

El último es un fragmento de la carta escrita a Goldbach, en el que figura por vez primera la conjetura de que "en todo poliedro, el número de vértices es igual al de aristas aumentado en dos", muestra del carácter apriorístico de los enunciados matemáticos de la época.

Nota bibliográfica

"Solutio problematis ad Geometriam situs pertinentis" y "Carta a Christian Goldbach" los hemos traducido de la versión inglesa del original latino que figura en BIGGS, Norman L. - LLOYD, E. Keith - WILSON, Robin J.— Graph Theory, 1736-1936 — Clarendon Press.-Oxford-1976.

Para "Prueba de que todo número es una suma de cuatro cuadrados" hemos utilizado la traducción inglesa del latín del profesor E.T.BELL. *Otra demostración de este teorema, debida a Lagrange, puede consultarse en "Números y figuras"-Hans Radamacher y Otto Toeplitz-Alianza Editorial-Madrid, 1970*

En la elaboración de este trabajo, hemos utilizado también :

E.T. BELL . Los grandes matemáticos . Editorial Losada-Bs.Aires

HOWARD EVES . An introduction to the history of Mathematics . Holt,Rinehart and Winston.

D.E. SMTH . A source book en Mathematics,vol.1 . Dover Publications-New York,1959

W.W. ROUSE BALL . A short account of the history of Mathematics Dover Publications-New York,1960

J.DIRK STRUIK . A concise history of Mathematics Dover Publications-New York,1967.

LEONARD EULER

SOLUTIO PROBLEMATIS AD GEOMETRIAM SITUS PERTINENTIS

(La solución de un problema relativo a la Geometría de posición)

Comentarii Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae.-8(1736).

1.- Además de la rama de la Geometría relativa a magnitudes, que ha recibido siempre la mayor atención, hay otra, casi desconocida antes de Leibnitz, que éste mencionó por primera vez y denominó Geometría de posición. Tiene sólo que ver con la determinación de la posición y sus propiedades; no trata las medidas ni los cálculos que pueden hacerse con ellas.

No ha sido todavía satisfactoriamente determinado qué clase de problemas son relevantes en este campo, ni qué métodos deben emplearse para resolverlos. Por tanto, cuando recientemente fue mencionado un problema, que parecía geométrico, pero estaba construido de tal forma que no requería la medida de distancias, ni el cálculo ayudaba en nada a su resolución, no dudé de que concernía a la Geometría de posición; especialmente porque su solución involucraba sólo la posición y no requería el uso de cálculos. He decidido dar aquí el método que he encontrado para resolver esta clase de problemas, como un ejemplo de la Geometría de posición

2.- El problema que digo es ampliamente conocido y es como sigue: "En Könisgsberg(Prusia) hay una isla A, llamada Der Kneiphof y el río que la rodea se divide en dos ramas(fig.1) y estas ramas son cruzadas por siete puentes a,b,c,d,e,f,g. Se preguntaba si es posible diseñar una ruta de tal manera que cruzara cada puente una y sólo una vez".

Me dijeron que algunas personas aseguraban que era imposible y otras estaban en duda; pero nadie podía asegurar que se pudiera hacer

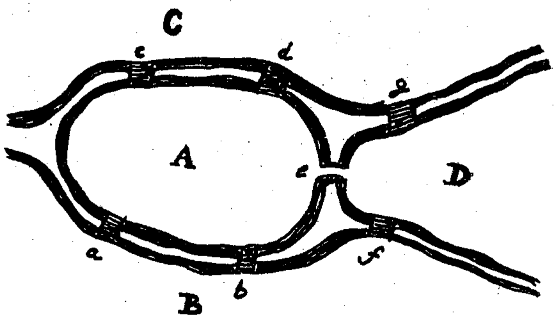


FIG. 1

De esto he formulado el problema general :

"Cualesquiera que sean la disposición y división del río en ramas y el número de puentes, ¿puede saberse si es o no posible cruzar cada puente exactamente una vez?

3.- El problema de los puentes de Königsberg puede resolverse haciendo una lista exhaustiva de todas las rutas posibles y ver entonces si hay alguna que satisfaga la condición. A causa del número de posibilidades, el método resulta demasiado difícil y laborioso. Y en problemas con un número mayor de puentes, imposible de aplicar.

Además, si este método se lleva hasta su conclusión, se encontrarán muchas rutas irrelevantes, lo que constituye la razón de su dificultad. Lo abandoné por ello y busqué otro que apuntase directamente sólo al problema de si la ruta en cuestión podía ser o no encontrada. Consideré que tal manera de proceder sería mucho más simple.

4.- Todo mi método descansa sobre la forma más conveniente de representar el cruce de puentes. Para esto, uso las letras mayúsculas A, B, C, D para cada una de las áreas de tierra separadas por el río. Si el viajero va de A a B sobre el puente a o b, indico esto con AB, donde la primera letra se refiere al área que deja y la segunda a la que llega. Así, si deja B y cruza hasta D por el puente f, represento este cruce por BD. La notación para los dos cruces combinados es ABD, indicando la letra intermedia el área a la que entra en el primer cruce y abandona en el segundo.

5.- De manera similar, si el viajero va de D a C por el puente g, represento estos tres sucesivos cruces por ABDC, lo que significa que, partiendo de A, cruza hasta B, sigue a D y, finalmente, llega a C. Como cada área de tierra está separada de cualquier otra por una rama del río, el viajero debe haber cruzado tres puentes.

Análogamente, los cruces de cuatro puentes se representarán mediante cinco letras y, en general, la representación de un itinerario cualquiera contiene un número de letras mayor en una unidad que el número de puentes cruzados. Así, el cruce de siete puentes requiere ocho letras para representarlo.

6.- En este método de representación no tengo en cuenta los puentes por los que se cruza, pero si el cruce de un área a otra puede hacerse por muchos puentes, entonces cualquier puente puede usarse tantas veces como el área requerida esté conectada. Se deduce de esto que si el itinerario a través de los siete puentes puede disponerse de tal manera que cada puente se cruce una vez, pero no dos, entonces la ruta puede representarse por ocho letras dispuestas así : las letras A y B estarán próximas a cada otra dos veces, pues hay dos puentes, a y b, que conectan las áreas A y B; de manera similar, A y C deben ser adyacentes dos veces en la serie de ocho letras y, por último, los pares A y D , B y D , C y D aparecerán juntos una vez cada uno.

7.- El problema se reduce, por lo tanto, a encontrar una secuencia de ocho letras, formada por A, B, C, D, en la que varios pares de ellas han de aparecer un número requerido de veces. Antes de tratar de cómo hallar la solución, es conveniente informarnos de si es posible disponer las letras de tal forma, ya que, de lo contrario, estaríamos trabajando en vano.

8.- Para intentar encontrar una regla al respecto, considero un área simple A en la que descansan cualquier número de puentes a,b,c,... (fig.2). Tomemos primero el puente a que descansa en A. Si una persona cruza este puente, o es que viene de A o tiene que llegar a A ; en cualquier caso, la letra A aparecerá una vez en la representación descrita. Si cruza tres puentes a,b,c apoyados en A, esta letra aparecerá dos veces, tanto si el viaje comienza en A como si no. Similarmente, si son cinco los puentes que se apoyan en A, en la representación del itinerario a través de ellos se encontrará tres veces la letra A. Y, en general, si el número de puentes es impar, y se aumenta en uno, el número de apariciones de A es la mitad de esta suma.

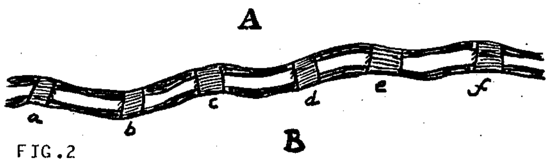


FIG.2

9.- Apliquemos esto a nuestro problema de los puentes de Königsberg : Como en el área A se apoyan cinco puentes (a,b,c,d,e), A tiene que repetirse tres veces en la representación de la ruta. Para la B resultarán dos veces, puesto que dicha área da apoyo a tres puentes. Lo mismo le ocurre a D y a C. Resultan, por tanto, 9 letras, y la secuencia de representación consta sólo de 8. En consecuencia, tal itinerario no puede efectuarse a través de los siete puentes de Königsberg.

10.- Para alguna disposición de puentes, y siempre que el número de los que se apoyan en cada área sea impar, es igualmente posible decir si un itinerario puede ser realizado cruzando cada puente una vez. Así, si la suma del número de veces que cada letra debe aparecer tiene una unidad más que el número de puentes, dicho itinerario no puede llevarse a cabo.

La regla que di para hallar el número de apariciones de la letra A, a partir del número de puentes que se apoyan en el área A, es también válida si todos los puentes vienen de otra área B, como muestra la figura 2, ó si vienen de diferentes áreas, pues consideraba el área A sola e intentaba buscar cuántas veces debía aparecer A.

11.- Si el número de puentes que se apoyan en A es par, al describir el itinerario se debe considerar si se parte o no de A ya que, por ejemplo, en el caso de dos puentes ocurre que : Si se sale de A, esta letra aparecerá dos veces; una para indicar que abandona A por un puente y la otra para indicar el regreso a A. Por el contrario, si se comienza en otra área, la letra A se escribirá una sola vez para señalar tanto la llegada como la salida a(de) A.

12.- Si hay cuatro puentes que se apoyan en A y el viajero parte de A, esta letra aparecerá tres veces en la representación de toda ruta en que se cruce cada puente una sola vez ; si el paseo empieza en otra área, A debe aparecer sólo dos veces. En el caso de seis puentes, : cuatro o tres apariciones de A, según se parta o no del área correspondiente a esta letra. En general, para un número par de puentes : si se sale de A, el número de veces que aparece esta letra es igual a la mitad del de puentes aumentada en uno ; si se sale de un área distinta, es igual a dicha mitad.

13.- Como sólo puede iniciarse una ruta desde un área única, resulta que : si el número de puentes es impar, el número de apariciones de la letra que denota un área es la mitad del número de puentes más uno ; si es par, el número de apariciones es su mitad. En consecuencia: Si el total de apariciones es igual al número de puentes más uno, el itinerio pedido es posible y tendrá aue iniciarse en un área con un número impar de puentes ; si,por el contrario,el número total de letras es el de puentes disminuido en uno,también es posible el itinerario,pero ha de partirse de un área que sostenga un número par de puentes,pues el número de letras se verá así incrementado en uno.

14.- Así,cualquiera que sea la disposición del agua y el número de puentes,el método siguiente determinará si es posible o no seguir un itinerario que satisfaga la condición impuesta.

Primero denoto mediante las letras A,B,C,D,...las áreas que están separadas unas de otras por el agua. Anoto el número de puentes y dicho número aumentado en uno. Escribo en una columna las letras indicadoras de áreas y en otra los números correspondientes de puentes sustentados, señalando con asteriscos las letras que resulten con números pares asignados.A continuación,escribo junto a cada número par su mitad y al lado de cada impar el resultado de sumarle uno y hallar luego la mitad.Finalmente,sumo todas las mitades obtenidas.

Si la suma resultante es igual al número de puentes aumentado en uno,ó menor en una unidad que dicho número,es posible hacer un itinerario pasando una sola vez por cada puente.

Debe recordarse que en caso de igualdad la ruta ha de iniciarse en una área no señalada con asterisco,y en el otro caso en una que lo lleve.

Veamos cómo la aplicación de este método muestra la imposibilidad de realizar un itinerario que cruce cada uno de los siete puentes de Königsberg una sola vez :

7 (8)

A	5	3
B	3	2
C	3	2
D	3	2
		(9)

15.- Resolvamos ahora el caso más complicado que ilustra la figura 3 : Dos islas A y B,cuatro ríos y quince puentes que cruzan los ríos y el agua que rodea a las islas. Puede hacerse un itinerario de tal manera que cada puente sea atravesado exactamente una vez?

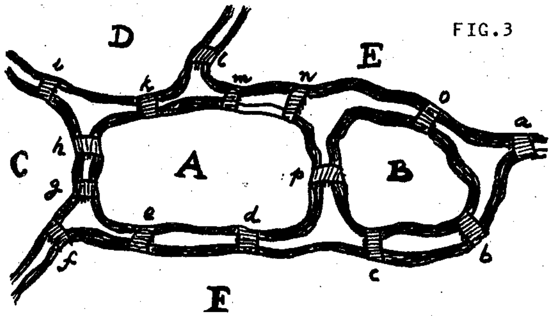


FIG.3

Primero.- Designo mediante las letras A,B,C,D,E,F las seis áreas separadas por agua.

Segundo.- Incremento el número de puentes en 1 y anoto el resultado.

Tercero.- Escribo en columna las letras indicadoras de áreas y junto a cada una el número de puentes correspondientes: los 8 que se apoyan en A, los 4 de B, etc.

Cuarto.- Pongo asterisco a las letras con número par al lado.

Quinto.- Junto a cada número par, escribo su mitad. Junto a cada impar, el resultado de aumentarlo en 1 y hallar la mitad de la suma.

Sexto.- Sumo los números de la tercera columna y comparo con el número de puentes incrementado en 1.

	A*	8	4
	B*	4	2
15 (16)	C*	4	2
	D	3	2
	E	5	3
	F*	6	3
			(16)

Se sigue que es posible el itinerario en cuestión si se parte del área D o de la E. Su representación es :

E a F b B c F d A e F f C g A h C i D k A m E n A p B o E l D

16.- De esta forma será fácil, aun en los casos más complicados, determinar si es posible o no realizar un itinerario donde cada uno de los puentes se atraviese una y sólo una vez. No obstante, mediante algunas consideraciones previas, el método puede hacerse mucho más simple.

La suma de los números escritos junto a las letras que representan las áreas es el doble del número de puentes, ya que cada uno de estos se cuenta dos veces; una por cada área que une.

17.- Por razón de lo anterior, aquella suma tiene que ser par. Ahora bien, esto es imposible si uno, tres, cinco, siete,... de los números asociados son impares. Entonces, para que la condición de suma par se cumpla, tiene que haber un número par de letras de áreas con números impares asociados. En efecto, en el problema de Königsberg son cuatro estas letras, y en el otro dos.

18.- Como la suma de los números asociados a A, B, C, D,... es doble del de número de puentes, si dicha suma se aumenta en 2 y se divide el resultado entre 2, se obtendrá el número de puentes incrementado en 1. Si, por otro lado, todos los números asociados son pares, la suma de todos los números de la tercera columna tendrá una unidad menos que el número de puentes incrementado en 1. Y así, cualquier área que marque el comienzo de un itinerario tendrá un número par de puentes, como se requería. Esto ocurrirá en el problema de Königsberg si el viajero cruza dos veces por cada puente, pues cada puente puede ser tratado como si fuera desdoblado en dos, y resultará par el número de puentes que se apoyan en cada área.

19.- Más aún, si sólo dos de los números asociados son impares, es posible hacer el viaje si se parte de un área con un número impar de puentes, ya que la suma de mitades resultará mayor en una unidad que el número de puentes y, por tanto, igual a éste aumentado en 1.

Puede verse, además, que si en la segunda columna aparecen cuatro, seis, ocho,... números impares, la suma de la tercera columna será mayor en 1,2,3,..que el número de puentes aumentado en 1 y, en consecuencia, el itinerario pedido será imposible.

20.- Así, para cualquier disposición propuesta, puede determinarse si existe un itinerario donde no se atraviese más que una vez cada puente, aplicando la siguiente regla :

" Si hay más de dos áreas sustentando un número impar de puentes, el itinerario es imposible.
Si sólo existen dos de estas áreas, puede hacerse partiendo de una de ellas.
Si no hay áreas con número impar de puentes, se puede realizar desde cualquier área. "

21.- Una vez determinado que el itinerario es posible, queda el cómo hacerlo. Para ello uso la regla que sigue:

" Se eliminan mentalmente los pares de puentes que lleven de un área a otra, con lo que se reduce considerablemente el número de puentes. Es entonces un ejercicio fácil construir la ruta. La eliminación hecha no alterará significativamente la misma, como se verá claramente después de un corto razonamiento.

No considero importante dar más detalles concernientes al descubrimiento de rutas.

PRUEBA DE QUE TODO NUMERO ENTERO ES UNA SUMA DE CUATRO CUADRADOS

Publicado inicialmente en el Acta Eruditorum, pág. 193 -Leipzig, 1973

LEMA.- El producto de dos números, cada uno de los cuales es suma de cuatro cuadrados, se puede expresar siempre como una suma de cuatro cuadrados.

Sea tal producto $(a^2+b^2+c^2+d^2)\ (\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2)$

Si hacemos

$$A=a\alpha+b\beta+c\gamma+d\delta$$

$$B=a\beta-b\alpha-c\delta+d\gamma$$

$$C=a\gamma+b\delta-c\alpha-d\beta$$

$$D=a\delta-b\gamma+c\beta-d\alpha$$

resulta

$$A^2+B^2+C^2+D^2 = (a^2+b^2+c^2+d^2)\ (\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2)$$

ya que, obviamente, los productos cruzados se cancelan.

TEOREMA 1.- Si N es divisor de una suma de cuatro cuadrados, $p^2+q^2+r^2+s^2$, ninguno de los cuales es divisible por N, entonces N es la suma de cuatro cuadrados.

Primero se demostrará que cada una de las raíces p, q, r, s, puede ser elegida menor que $1/2\ N$.

I. Sea n el cociente de dividir la suma de cuatro cuadrados por N, así que $Nn=p^2+q^2+r^2+s^2$. Podemos entonces escribir $p=a+n\alpha$, $q=b+n\beta$, $r=c+n\gamma$, $s=d+n\delta$, donde cada resto a, b, c, d no excede $1/2\ n$ en valor absoluto. Por tanto, $a^2+b^2+c^2+d^2 \leqslant n^2$.

II. Por sustitución de los valores anteriores de p, q, r, s en $Nn=p^2+q^2+r^2+s^2$, obtenemos

$Nn=a^2+b^2+c^2+d^2+2n(a\alpha+b\beta+c\gamma+d\delta) + n^2(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2)$ de donde sigue que n debe ser divisor de $a^2+b^2+c^2+d^2$.

Poniendo $a^2+b^2+c^2+d^2=nn'$, es entonces $n>n'$ o $n'<n$

Dividiendo obtenemos

$$N=n'+2A+n(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2)$$

III. Multiplicando ahora por n' y teniendo en cuenta el lema anterior y que $nn'=a^2+b^2+c^2+d^2$, tenemos que

$$nn'(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2) = A^2+B^2+C^2+D^2$$

Combinando esto con la ecuación precedente, encontramos

$$Nn'=n'^2+2n'A+A^2+B^2+C^2+D^2$$

y por tanto

$$(n'+A)^2+B^2+C^2+D^2=Nn'$$

IV. Por repetición del argumento anterior, obtenemos una secuencia decreciente de enteros Nn', Nn'', ...y de aquí, finalmente, llegaremos a $N.1$ y su expresión como suma de cuatro cuadrados.

COROLARIO.- Para salvar la excepción aparente, sean p,q,r,s números impares y n un número par. Entonces, ya que $Nn=p^2+q^2+r^2+s^2$, tenemos

$$\frac{1}{2}Nn=\left(\frac{p+q}{2}\right)^2+\left(\frac{p-q}{2}\right)^2+\left(\frac{r+s}{2}\right)^2+\left(\frac{r-s}{2}\right)^2$$

donde los cuatro cuadrados de la derecha son números enteros. Una reducción tal se puede llevar a cabo si las raíces de los cuatro cuadrados som impares. Así, la excepción cuando $n=2$ desaparece.

TEOREMA 2.- Si N es un número primo, no sólo podemos encontrar cuatro cuadrados no divisibles por N, en una infinidad de formas, cuya suma sea divisible por N, sino también tres cuadrados.

Con respecto a N, todos los números están de una u otra manera incluidos en las N formas

$$\lambda N\ ,\ \lambda N+1\ ,\ \lambda N+2\ ,\ \lambda N+3\ ,\ \ldots\ldots,\lambda N+N-1$$

Desechemos la primera, λN, que contiene a todos los múltiplos de N. Quedan $N-1$ formas. Observemos que el cuadrado de un número de la forma $\lambda N+1$, así como el cuadrado de un número de la forma $\lambda N+N-1$, pertenece a la misma forma $\lambda N+1$. Similarmente, el cuadrado de un número de la forma $\lambda N+2$ o $\lambda N+N-2$ es de la forma $\lambda N+4$, y así sucesivamente. Así que, los cuadrados de todos los números, exceptuando los de la forma λN, están comprendidos en las $1/2(N-1)$ formas siguientes

$$\lambda N+1 \ , \ \lambda N+4 \ , \ \lambda N+9 \ , \ \ldots.$$

a las que llamaremos formas de la primera clase y denotaremos por

$$\lambda N+a \ , \ \lambda N+b \ , \ \lambda N+c \ , \ \lambda N+d \ , \ldots.$$

donde $a,b,c,d,\ldots$ denotan los cuadrados $1,4,9,16,\ldots$, o, si exceden a N, sus restos al dividirlos por N. Las restantes $1/2(N-1)$ formas las denotaremos por

$$\lambda N+\alpha \ , \ \lambda N+\beta \ , \ \lambda N+\gamma \ , \ \ldots..$$

y llamaremos formas de la segunda clase.

Es fácil probar las tres propiedades siguientes concernientes a estas clases.

I. El producto de dos números de la primera clase es un número de la primera clase, ya que, evidentemente, $\lambda N+ab$ pertenece a la primera clase. Si $ab>N$, se toma el resto de la división de ab entre N.

II. Números de la primera clase $a,b,c,d,\ldots$ multiplicados por números de la segunda $\alpha,\beta,\gamma,\delta,\ldots$ dan productos en ésta.

III. Un producto de dos números de la segunda clase, $\alpha\beta$, cae en la primera clase.

Procederemos ahora a la prueba del teorema 2 por medio de una contradicción.

Supongamos entonces que no hay tres cuadrados, no todos divisibles por N, cuya suma es divisible por N. Entonces, más aún, no hay dos de tales cuadrados. De aquí sigue, por lo tanto, que la forma $\lambda N-a$, o la que es la misma, $\lambda N+(N-a)$, no puede pertenecer a la primera clase, pues si existiera un cuadrado de la forma $\lambda N-a$, la suma de él y $\lambda N+a$ sería divisible por N, lo cual es contrario a la hipótesis. De aquí que la forma $\lambda N-a$ es necesariamente de la segunda clase; los números $-1,-4,-9,\ldots$ son del conjunto $\alpha,\beta,\gamma,\delta\ldots.$

Sea f cualquier número de la primera clase, de suerte que existen cuadrados de la forma $\lambda N+f$. Si a uno de ellos le sumamos un cuadrado de la forma $\lambda N+1$, la suma tendrá la forma $\lambda N+f+1$. Si ahora hubiera cuadrados de la forma $\lambda N-f-1$; tendríamos una suma de tres cuadrados divisible por N. Ya que esto no es posible, la forma $\lambda N-f-1$ no está contenida en la primera clase y, en consecuencia, lo está en la segunda. Pero en esta clase aparecen los números -1 y $-f-1$ y, por la propiedad III, su producto $f+1$ es de la primera clase. De la misma manera se puede demostrar que los números $f+2, f+3, f+4, \ldots$ deben ser de la primera clase. De aquí, tomando $f=1$, vemos que todos los números $\lambda N+1$, $\lambda N+2$, $\lambda N+3$, ... son de la primera clase, y, por lo tanto, no dejamos ninguno para la segunda. Pero, por el mismo razonamiento vemos que los números $-1, -f-1, -f-2, \ldots$ son de segunda clase y de aquí que todas las formas están en la segunda clase. Esto, obviamente, es una contradicción. Por lo tanto, se infiere que es falso que no haya tres cuadrados cuya suma es divisible por N, es decir, existen tres cuadrados, y por tanto, más aún, cuatro cuadrados de la clase prescrita cuya suma es divisible por N.

COROLARIO.- De este teorema, combinado con el precedente, obviamente sigue que cada número es una suma de cuatro o menos cuadrados.

CARTA A CHRISTIAN GOLDBACH

Berlin, Noviembre de 1750

Recientemente se me ha ocurrido determinar las propiedades generales de sólidos acotados por caras planas. No hay duda de que se encontrarán teoremas generales para ellos; de la misma forma que para figuras rectilineables planas, cuyas propiedades son : (1) que en toda figura plana el número de lados es igual al número de ángulos y (2) que la suma de todos los ángulos es igual a tantas veces dos ángulos rectos como lados haya menos cuatro. Mientras que en las figuras planas se necesita considerar sólo los lados y los ángulos, en el caso de sólidos más partes han de ser tomadas en cuenta; nominalmente:

I. las caras, cuyo número = H

II. los ángulos sólidos, cuyo número = S

III. las uniones donde dos caras se unen lado a lado, que, a falta de una palabra aceptada, llamo "aristas" y cuyo número = A

IV. los lados de todas las caras; el número de los cuales sumados juntos = L

V. los ángulos planos de todas las caras, cuyo número total = P

Respecto a estas cinco cantidades, es claro que :

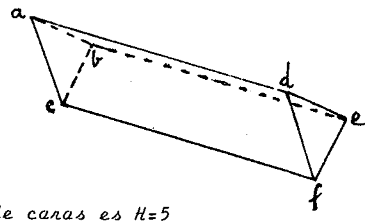
1. P = L , pues en cada cara el número de ángulos = número de lados
2. También es A siempre = 1/2 L ó A = 1/2 P, porque dos lados de diferentes caras deben unirse para formar una arista.
3. El número de lados, o el de ángulos planos, de todas las caras que encierran al sólido, es siempre, como consecuencia de lo anterior, par.
4. $\left.\begin{array}{l} \text{o } L = 3H \quad \text{o} \quad L > 3H \\ \text{o } P = 3S \quad \text{o} \quad P > 3S \end{array}\right\}$ y P = L

Estas dos últimas propiedades son obvias, pues ninguna cara tiene menos de 3 lados y ningún ángulo sólido menos de tres ángulos planos.

Pero no puedo dar todavía pruebas satisfactorias de las siguientes proposiciones :

6. En todo sólido limitado por caras planas, la suma del número de caras y el número de ángulos sólidos excede en dos al número de aristas: $H+S = A+2$ o $H+S = \frac{1}{2}L + 2 = \frac{1}{2}P + 2$
7. Es imposible que $A+6 > 3H$ o $A+6 > 3S$
8. Es imposible que $H+4 > 2S$ o $S+4 > 2H$
9. Ningún sólido puede ser construido si todas sus caras tienen 6 ó más lados, ni si todos sus ángulos sólidos están formados por 6 ó más ángulos planos.
10. La suma de todos los ángulos planos de un sólido es igual a tantos ángulos rectos como unidades haya en 4A-4H.
11. La suma de todos los ángulos planos es igual a cuatro veces tantos ángulos rectos como ángulos sólidos haya, menos ocho; es decir, 4S-8 ángulos rectos.

Veamos un ejemplo en el prisma triangular :



1. El número de caras es $H=5$
2. El número de ángulos sólidos, $S=6$
3. El número de aristas es $A=9$ (ab, ac, bc, ad, be, cf, de, df, ef)
4. El número de lados y de ángulos planos es $L=P=18$, porque el cuerpo está acotado por dos triángulos y tres cuadriláteros y, entonces, es $L=P=2.3+3.4=18$

De acuerdo con el teorema 6, es $H+S(11)=A+2(11)$. Más aún, la suma de todos los ángulos planos es 16 rectos (4 de los dos triángulos y 12 de los tres cuadriláteros) : $4(A-H) = 4S-8$ ángulos rectos.

Encuentro sorprendente que estas propiedades generales en la Geometría sólida no hayan sido vistas por nadie hasta ahora, siendo tan tar de cuando yo lo he hecho. Es más, que los importantes teoremas 6 y 11 sean tan difíciles que todavía no ha sido posible probarlos satisfactoriamente.