SOBRE LA REGLA DE L'HÔPITAL

Juan J. Trujillo J. del Castillo
Dámaso Avila Plasencia
Juan Carlos Moreno Piquero

Introducción

Nuestro propósito con estas notas no es otro que el de dar a conocer algunas consideraciones - que pueden ser usadas didácticamente - en torno a la conocida y mal llamada regla de *L'Hôpital*. Todos sabemos que se trata de un tópico de "obligado cumplimiento" para los cursos de enlace entre la enseñanza secundaria y la universitaria, y que tanto profesores como alumnos le concedemos una alta utilidad práctica.

Es ilustrativo apuntar que la paternidad de esta técnica para el cálculo de límites de tipo indeterminado, que data de finales del siglo XVII, ha constituido una de las más famosas polémicas de la Historia de la Matemática, en la que incluso han intervenido matemáticos de la talla de George Cantor o Jean Etienne Montucla. Entremos a analizar cómo y por qué se generó tal controversia.

Guillaume F.A. L'Hôpital, marqués de Saint-Mesme, conde de Entremont y señor de Ouques, (1661-1704), es un claro ejemplo de aristócrata que abandona su carrera militar por la Ciencia. Su afán por la Matemática llevó su nombre a la historia de esta con todo merecimiento, ya que contribuyó en gran medida a la difusión por toda Europa del Cálculo Diferencial de Leibniz, a través del primer libro de "texto" que se publicó sobre esta materia : *Analyse des infiniment petits*,Paris,1696. Además, *L'Hôpital* es autor de trabajos originales dando solución a famosos problemas matemáticos de la época. Por otra parte,su *Traité analytique des sections coniques*,publicado póstumamente,aunque no enteramente original, sirvió como tratado de geometría de las cónicas durante buena parte del siglo XVIII,lo que da idea de su calidad como escritor de libros de recopilación.

A temprana edad,*L'Hôpital* estableció contacto con hombres célebres como C.Huygens,Leibniz y los hermanos Bernoulli. De la relación con estos últimos provienen las diferencias que en torno a su obra se desataron. El suizo Jean Bernouilli estuvo en Francia durante los primeros años de la última década del s. XVII y pasó parte del tiempo en Ouques para introducir a *L'Hôpital* ,que contaba alrededor de 30 años,en el Cálculo diferencial de Leibniz. Cuenta Carl Boyer,en "A History of Mathematics",que Bernouilli llegó incluso a firmar un pacto que le obligaba, a cambio de un salario regular,a comunicar al noble francés sus descubrimientos matemáticos para que los usara como lo considerase más conveniente.

La famosa regla sobre el cálculo de límites fue descubierta por Jean Bernouilli en 1694 y publicada por *L'Hôpital* en su "Analyse des infiniment petits" en 1696. A partir de ese momento se conoce como "regla de L'Hôpital",aunque algunos autores de nuestro siglo,entre ellos Rey Pastor,la denominan,acertadamente,"de Bernouilli-L'Hôpital". Hay que reconocer,no obstante,que L'Hôpital menciona honoríficamente a Bernouilli en su tratado e,incluso,le obsequió con un ejemplar que este le agradeció por escrito.

El hecho es que Jean Bernouilli intentó recobrar la autoría en sendas cartas a Leibniz en 1698 y a Brook Taylor en 1704(ya muerto L'Hôpital). Pero,según parece,la reivindicación fue muy discreta;quizás porque Bernouilli,que por entonces era profesor en Gröningen,debía en alguna medida este puesto al Marqués.

Regla de Bernouilli-L'Hôpital para sucesiones

No deja de resultar curiosa la difusión dada hoy en día a la regla de Bernouilli-L'Hôpital para la resolución de indeterminaciones del tipo 0/0 e ∞/∞ en límites funcionales. Sin embargo, a pesar de la simple conexión (teorema 1) entre límites de funciones y de sucesiones, no llevamos, en general, a las aulas la particularización de esta técnica para resolver indeterminaciones del mismo tipo con sucesiones, a pesar de la importancia de estas. También es interesante resaltar que no es muy abundante la bibliografía de consulta (4, pág. 200 y 6, pág. 101) en que se mencione esta regla para sucesiones y, mucho menos frecuente, encontrarla aplicada a problemas concretos.

Teorema 1.- Sea $f(x)$ una función real de dominio $I=(a,\infty)$ con $a\in R$, para la que existe el límite de $f(x)$ cuando $x \to \infty$ y vale ℓ. Sea $f(n)$ la función real de variable natural (sucesión) cuyo dominio es $I\cap N$. Entonces, afirmamos que existe el límite de $f(n)$ cuando $n \to \infty$ y vale ℓ, esto es

$$\lim_{x\to\infty} f(x)= \ell \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} f(n)=\ell$$

Su demostración es casi trivial:

$$\text{Si } \{\forall\varepsilon>0 \;,\; \exists H\in R^+ \;/\; \forall x\in R \wedge x\geq H \Longrightarrow \left|f(x)-\ell\right| < \varepsilon \;\} \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow \{\forall\varepsilon>0 \;,\; \exists \nu=E(H)+1 \;/\; \forall n\geq\nu, n\in N \Rightarrow \left|f(n)-\ell\right| < \varepsilon \;\}$$

En "Análisis Matemático I", de Jordi Puig, puede encontrarse un teorema más general, a partir del cual se puede obtener el anterior.

Si pretendiéramos calcular un límite sucesional del tipo α_n/β_n, donde α_n y β_n son sucesiones tales que $\alpha_n\to 0$ y $\beta_n\to 0$, o bien $\alpha_n\to\infty$ y $\beta_n\to\infty$, al crecer n indefinidamente, y suponemos $\alpha_n=f(n)$ y $\beta_n=g(n)$, $n\in M\subset N$, asociaríamos a $f(n)$ y $g(n)$ las funciones $f(x)$ y $g(x)$ respectivamente, siempre que fuera posible, y calcularíamos el límite de $f(x)/g(x)$ para $x\to+\infty$, supuesto que $f(x)$ y $g(x)$ verificaran las hipótesis del teorema de Bernouilli-L'Hôpital. Si este límite existe y vale ℓ, entonces, por el teorema anterior, existe $\lim_{n\to\infty} \alpha_n/\beta_n=\ell$

El ejercicio que sigue, cuya resolución mediante las técnicas típicas para sucesiones resulta engorrosa, es un ejemplo de la utilidad de la regla que comentamos. Se trata de calcular

$$L=\lim_{n\to\infty} n\left[e-\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\right] = \lim_{n\to\infty}\frac{\left[e-\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\right]}{\frac{1}{n}}$$

Al ser un límite del tipo 0/0, hagamos

$$\begin{cases} f(n)=e-\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} \\ g(n)=\frac{1}{n} \end{cases} \quad \text{y sus asociadas} \quad \begin{cases} f(x)=e-\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} \\ g(x)=\frac{1}{x} \end{cases}$$

y calculemos

$$L=\lim_{x\to\infty}\frac{e-\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}}{\frac{1}{x}} = \lim_{t\to 0}\frac{e-(1+t)^{1/t}}{t}, \text{donde } t=1/x$$

Aplicando ahora la regla de Bernouilli-L'Hôpital para funciones, sucesivas veces, resulta

$$L=\lim_{t\to 0}\frac{-(1+t)^{1/t}\left[\frac{1}{t(t+1)}-\frac{\ln(1+t)}{t^2}\right]}{1} =$$

$$=\left\{\lim_{t\to 0}\frac{(t+1)\ln(1+t)-t}{t^2(1+t)}\right\}\cdot e =$$

$$= e.\lim_{t\to 0}\frac{\ln(1+t)}{3t^2+2t} = e.\lim_{t\to 0}\frac{1/(1+t)}{6t+2} = e/2$$

En consecuencia,

$$L=\lim_{n\to\infty} n\left[e-\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\right]= e/2$$

Es de advertir que, a pesar de todo lo indicado, ocasionalmente encontramos enmascarada la utilización del Teorema 1 en la resolución de algunos límites sucesionales; por ejemplo, cuando se hacen cambios de variable del tipo 1/n=t.

Infinitésimos e infinitos sucesionales

Por último, debemos subrayar la utilidad que la teoría de los infinitésimos (infinitos) equivalentes funcionales tiene en la resolución de indeterminaciones sucesionales, a través del teorema de conexión. Así pues, si definimos como infinitésimo(infinito) sucesional a una sucesión nula(divergente), esto es, que su límite es cero(infinito), podemos adoptar criterios de comparación a través del cociente, de forma que son sucesiones infinitésimas(infinitas) de igual orden las que verifican que el límite de su cociente es igual a una constante K no nula. En particular, denominaremos sucesiones infinitésimas(infinitas) equivalentes a aquellas para las que es K=1.

De esta manera, las sustituciones conocidas entre sucesiones-pensemos en la equivalencia de Stirling- se verían completadas con la gama de infinitésimos(infinitos) equivalentes usuales para las funciones, que a través de los razonamientos indicados, incidirían claramente, con las debidas restricciones, en la teoría de límites sucesionales.

Bibliografía

(1) Boyer, Carl B. *A History of Mathematics*
John Wiley & Sons. New York, 1968

(2) Cajori, Florian *A History of Mathematics*
Third edition. Chelsea Publishing Co. New York, 1980

(3) Coolidge, J.L. *The Mathematics of Great Amateurs*
Dover Publications. New York, 1963

(4) Moya-Moreno *Problemas de Cálculo Infinitésimal*
Marcombo. Barcelona, 1969

(5) Puig, Jordi *Análisis Matemático I*
Toray-Mason. Barcelona, 1969

(6) Rey Pastor y otros *Análisis Matemático*
Vol.1. Kapelusz. Buenos Aires, 1952

Lecciones de Matemáticas

1

Sociedad Canaria de Profesores de Matemáticas

Autores

Manuel de Armas Cruz
Luis Balbuena Castellano
José R. Comes González
Juan Antonio García Cruz
Manuel García Mz. de Velazco
José Conrado González García
Juan Ramón Negrín Aguirre
Carlos Olano y Lorenzo–Cáceres
José A. Rupérez Padrón
Arnulfo L. Santos Hernández

LO ALTO Y LO BAJO