EL ALGORITMO DE GAUSS PARA FIJAR EL DOMINGO DE PASCUA: REFLEXIONES SOBRE EL CALENDARIO

Fernando Hernández Guarch
José Mª Limiñana Cañal
Colegio Universitario de Las Palmas

El 15 de octubre de 1982,
viernes, empezó el segundo
ciclo del Calendario gregoriano.

Que en una misma fecha coincidan el ser viernes y 13, es para los anglosajones tan malo como puede ser para un español el que sea martes y 13. De ahí, probablemente, el interés de un antiguo problema (1) donde se pide : "Demuéstrese que el día 13 de un mes cualquiera es más factible que sea viernes que cualquier otro día de la semana". La respuesta se obtiene consultando un calendario perpetuo donde se muestra que al ser cíclico y de período 400 años, con las reglas conocidas para el cálculo de bisiestos podemos leer que la distribución de días de la semana para los 4800 décimoterceros días del mes es :

Domingo	lunes	martes	miércoles	jueves	viernes	sábado
687	685	685	687	684	688	684

Es decir, que en esto tienen peor suerte los anglosajones.

No creemos, sin embargo, que Gregorio XIII estuviera pensando en ellos cuando instauró su calendario (2). Nos inclinamos a pensar que fueron motivos religiosos,relacionados con la fecha de la Pascua,los que le hicieron dar este paso.

El cálculo de esta fecha ha traído de cabeza a la Iglesia desde sus orígenes. Podemos echarle la culpa a haber querido compaginar dos calendarios que son "inconmensurables" entre sí. La Iglesia es de alguna manera una institución romana que usó el calendario juliano-calendario solar,oficial en el Imperio desde el 45 a.d.C.-cambiando sólo su orígen,que quiso hacer coincidir con el nacimiento de Cristo;aunque tampoco esto está claro,ni siquiera para los teólogos católicos.

Por otra parte,la Iglesia tenía hundida sus raíces en la cultura judía,de donde sacó la festividad de la Pascua,que se regía con el calendario lunar de los israelitas.

Tratar de fijar una fecha que sigue a la Luna,en un calendario que sigue al Sol,es tarea complicada. En ello se afanaron desde un principio,adoptando los números áureos de Metón. Había descubierto éste que 19 años solares (19x365,2425=6939,60) coincidían casi exactamente con 235 ciclos lunares (235x29,53=6939,55),teniendo que transcurrir unos 300 años para que el error acumulado fuera del orden de 1 día. Esta regla se impuso tras el Concilio de Nicea,año 325,y con la intención de que la Pascua se celebrara en todo el mundo cristiano el mismo día,establecieron la siguiente norma : Había de tener lugar el primer domingo posterior al día 14 del mes lunar(aproximadamente la Luna llena) que coincide o sigue al 21 de marzo. En consecuencia,la Pascua puede caer en cualquier domingo comprendido entre el 22 de marzo y el 25 de abril.

El número áureo se empleaba para calcular el estado de la Luna a 1 de enero,dividiendo el año en curso por 19 y obteniendo el resto que, de ser nulo,se tomaba como 19. Conocido este dato era fácil determinar cuándo sería la Pascua. Pero los clérigos de aquellos tiempos no estaban para divisiones ni para aplicar complicados algoritmos. Y así,celebraban la Pascua cuando buenamente les parecía.

Muchos estudiosos dictaron reglas que explicaban el procedimiento buscando formas más simples y generales;pero ni siquiera San Beda el Venerable tuvo éxito en su intento (3). A pesar de todo,esta búsqueda generó un interés grande por la Aritmética y a ella hay que agradecerle ciertos avances de esta disciplina.

Por el exceso de bisiestos del calendario juliano,el equinoccio de primavera se fue desplazando del 21 de marzo,separándose de la Pascua. Más concretamente,la duración del año trópico es de 365.2422 días (medido en el año patrón 1900) y la del año medio juliano es de 365.25 días,diferencia que en los 2007 años transcurridos desde su implantación nos daría un desfase de unos trece días. De hecho,en tiempos de Gregorio XIII el desfase era de 10 días aproximadamente,y el equinoccio de primavera coincidiría con el 11 de marzo,con lo que la Pascua"acabaría celebrándose en verano"(2).

Puestas así las cosas,la reforma gregoriana tenía tres objetivos: a) corregir el desfase; b) conseguir que la fecha del 21 de marzo marque el equinoccio de primavera sin moverse; c) dar normas sencillas en lo posible para fijar la fecha de la Pascua. Para lo primero,es sabido que se legisló que "al 4 de octubre,jueves,siguiera el 15 de octubre,viernes",desplazando así el calendario en los diez días ganados. Lo segundo, algo más complicado,se consiguió en la medida que lo permitían los conocimientos astronómicos de la época. Se sabía,y así figura en las tablas astronómicas de Alfonso X el Sabio,que la duración del año trópico era de 365 días,5 horas,49 minutos,aunque se desconocía el dato de que esa duración iba variando en el tiempo,acortándose lentamente (Queremos hacer notar que la Iglesia se apoyó para esta reforma en el sistema copernicano,que aceptaba como modelo matemático,pero no como modelo físico, lo que podría atestiguar Galileo). De todas maneras,parece que hasta dentro de unos 2000 años el equinoccio de primavera rondará al 21 de marzo. De hecho sólo coincide con esta fecha algunos años. En efecto,si en el año 0 el equinoccio coincide con las 0 horas del 21 de marzo,en los siguientes seguirá la secuencia que se muestra en la tabla adjunta ,la cual es sólo una aproximación didáctica :

Fecha	21	21	21	20	20	21	21	20	20
Hora	0	5h48m	11h37m	17h26m	23h15m	5h3m	10h52m	16h41m	22h30m
Año	0	1	2	3	4	5	6	7	8

En lo que respecta al tercer punto,Gregorio XIII introdujo las "epactas" lunares medidas sobre tablas astronómicas ya confeccionadas para el estudio de las mareas y otros usos de la navegación.

El buscar un algoritmo que permita,de manera general y con el solo dato del año en curso,saber cuándo será la Pascua,seguía siendo tarea en la que se empeñaron algunos. Así;Gauss llegó a las siguientes fórmulas :

1) El día 22+d+c de marzo,si resulta esta fecha menor de 31,6

2) el día d+e-9 de abril.

Dividiendo el año propuesto entre 19,4 y 7,llamaremos a los restos respectivos a,b y c.

M y N son variables exógenas y valen 24 y 5 respectivamente,desde 1900 hasta 2100.

d es el resto de la división de 19a+M entre 30.

e es el resto de 2b+4c+6d+N entre 7.

Apliquemos este cálculo a 1983:

$1983 = 104 \times 19 + 7$ $a=7$ $d=(19 \times 7 + 24),mod.\ 7$ $d=7$

$1983 = 495 \times 4 + 3$ $b=3$ $e=(2 \times 3 + 4 \times 2 + 6 \times 7 + 5),$

$1983 = 287 \times 7 + 2$ $c=2$ $mod.\ 7$ $e=5$

Resultan,por tanto,dos fechas válidas,el 31 de marzo o el tres de abril,tomándose esta última por ser domingo.

No hemos podido encontrar el porqué de los valores de a,b,c,d y e (es sabido que Gauss no solía dejar pistas claras de sus razonamientos). Suponemos que "a" está relacionado con el número áureo de Metón;"b" señala de alguna forma los años bisiestos;"c" busca que el día escogido sea domingo;"d" fija la posición de la Luna y "e" corrige los resultados cuando la Pascua cae en abril.

En cualquier caso,las fórmulas no llegan a ser el algoritmo busca do,ya que además de dar frecuentes errores,como más adelante mostraremos,hay que introducir los valores extraños M y N. Tampoco son demasiado simples,y es posible que quien desee saber cuándo cae la Pascua haya de consultar un calendario hecho al efecto.Por esta razón,muchos "misales" traen la "Tabula temporaria festorum mobilium",donde figuran las fechas para un cierto número de años (30 en el consultado por nosotros).

A continuación,tabulamos las fechas de Pascua desde 1967 a 1996, obtenidas:

a) de la citada tabla del misal

b) utilizando el algoritmo de Gauss (apéndice 1)

c) mediante un programa recurrente elaborado por nosotros,al que denominamos PASCUA 3 (apéndice 2).

AÑO	T.t.f.m	A.GAUSS	P.PROPIO
1967	26 de marzo	26 de marzo	26 de marzo
1968	14 de abril	14 de abril	14 de abril
1969	6 de abril	6 de abril	6 de abril
1970	29 de marzo	26 de marzo (E1)	29 de marzo
1971	11 de abril	11 de abril	11 de abril
1972	2 de abril	2 de abril	2 de abril
1973	22 de abril	22 de abril	22 de abril
1974	14 de abril	14 de abril	14 de abril
1975	30 de marzo	29 de marzo (E1)	30 de marzo
1976	18 de abril	18 de abril	18 de abril
1977	10 de abril	10 de abril	10 de abril
1978	26 de marzo	28 de marzo (E1)	26 de marzo
1979	15 de abril	15 de abril	15 de abril
1980	6 de abril	6 de abril	6 de abril
1981	19 de abril	26 de abril (E2)	26 de abril (E2)
1982	11 de abril	11 de abril	11 de abril
1983	3 de abril	3 de abril	3 de abril
1984	22 de abril	22 de abril	22 de abril

1985	7 de abril	7 de abril	7 de abril
1986	30 de marzo	31 de marzo (E1)	30 de marzo
1987	19 de abril	19 de abril	19 de abril
1988	3 de abril	3 de abril	3 de abril
1989	26 de marzo	24 de marzo (E1)	26 de marzo
1990	15 de abril	15 de abril	15 de abril
1991	31 de marzo	(E3)	31 de marzo
1992	19 de abril	19 de abril	19 de abril
1993	11 de abril	11 de abril	11 de abril
1994	3 de abril	3 de abril	27 de marzo (E2)
1995	16 de abril	16 de abril	16 de abril
1996	7 de abril	7 de abril	7 de abril

E1 indica que la fecha no es domingo; E2,que hay un salto de una semana y E3 que el algoritmo no es aplicable.

Nótese que las fechas obtenidas por Gauss dan error en siete ocasiones,mientras que en las nuestras sólo hay dos. Sin embargo,convenimos la superioridad del algoritmo general de Gauss sobre un programa recurrente.

BIBLIOGRAFIA

(1) BROWN,B.H - Problem - Amer.Math Monthly,vol.40,1983,pág.607.

(2) MOYER,G. -El Calendario Gregoriano-Investigación y Ciencia, Julio,1982,págs.86 a 93.

(3) CROMBIE,H.A. - Historia de la Ciencia:de San Agustín a Galileo Alianza Universidad,Madrid.

APENDICE 1

```
PASCUA
   10 INPUT "EN QUE A^NO DESEA EMPEZAR",X
   20 INPUT "HASTA QUE A^NO DESEA LLEGAR",X1
   30 PRINT "LA FECHA DE LA PASCUA SERA LA SIGUIENTE"
   40 PRINT "  A/O           MARZO          ABRIL"
   50 A=X MOD 19
   60 B=X MOD 4
   70 C=X MOD 7
   80 D=(19*A+24) MOD 30
   90 E=(2*B+4*C+6*D+5) MOD 7
  100 M=22+D+C
  110 A1=D+E-9
  120 IF A1<1 AND M<32 THEN DO
  130   PRINT X;TAB(14);M
  140   GOTO 210
  150 DOEND
  160 IF M>31 AND A1>0 THEN DO
  170   PRINT X;TAB(30);A1
  180   GOTO 210
  190 DOEND
  200 PRINT X;TAB(14);M;TAB(30);A1;"(TOMESE EL QUE SEA DOMINGO)"
  210 X=X+1
  220 IF X>X1 THEN 240
  230 GOTO 50
  240 END
```

APENDICE 2

```
PASCUA3
   10 A=1966,S=1,L2=27
   20 A=A+1
   30 R1=A MOD 4
   40 X=(A MOD 19)+1
   50 IF X=19 THEN E=12
   60 ELSE E=11
   70 L=(L2+E) MOD 30
   80 IF L<13 THEN L1=12-L
   90 ELSE L1=42-L
  100 L2=L
  110 IF R1=0 THEN R=2
  115 ELSE R=1
  120 S1=(S+R+L1) MOD 7
  130 D=6-S1,S=(S+R) MOD 7
  140 P=22+L1+D
  145 PRINT "EN EL AN^O";A;
  150 IF P<32 THEN DO
  160   PRINT "LA FECHA DE PASCUA ES EL DIA";P;"DE MARZO"
  170 DOEND
  180 ELSE PRINT "LA FECHA DE LA PASCUA ES EL DIA";P-31;"DE ABRIL"
  190 IF A>1996 THEN 210
  200 GOTO 20
  210 END
```

AÑO 1983 N° 7

TECNICAS DE TRABAJO INTELECTUAL APLICADAS A LA MATEMATICA

CUADERNILLO N° 1: LOS APUNTES DE MATEMATICAS

CUADERNILLO N° 2 ¿COMO REALIZAR EL ACTO DE ESTUDIAR LAS MATEMATICAS?

CUADERNILLO N° 3 LA RESOLUCION DE PROBLEMAS DE MATEMATICAS (Próximo a publicarse)

Para pedidos de éstas y otras publicaciones de la Sociedad Canaria de Profesores de Matemáticas, dirigirse a:

SOCIEDAD CANARIA DE PROFESORES DE MATEMATICAS
Apartado de correos 329 – La Laguna (Tenerife)
ISLAS CANARIAS.–