SOBRE EL TEOREMA DE PITAGORAS

El conocimiento de su contenido en la Antigüedad y algunas demostraciones curiosas y generalizaciones

Manuel Luis de Armas Cruz

I.B. "Mencey Acaymo" - Güimar

Tal como lo conocemos actualmente, el teorema de Pitágoras es una relación entre los lados de un triángulo rectángulo que lleva implícita una interrelación entre la Aritmética y la Geometría. Sin embargo, su contenido puede ser conocido sólo en su variante puramente aritmética -que algunos llaman "relación pitagórica"- y que, a su vez, tiene mucho que ver con las denominadas ternas pitagóricas, sin que los números que en ella intervienen estén referidos explícitamente a entes geométricos.

Aunque el título de este trabajo haga sólo referencia al teorema, trataremos también de aquella relación y de estas ternas.

EL CONOCIMIENTO DE SU CONTENIDO EN LA ANTIGÜEDAD

En la exposición que sigue, que no pretende ser exhaustiva, comenzaremos por Babilonia en honor a que de ella se posee la mayor cantidad de material auténtico.

Babilonia :

Del medio millón de tabletas de arcilla, con escritura cuneiforme, rescatadas por los arqueólogos, alrededor de 300 están consideradas con contenido matemático, incluyendo problemas y tablas. Trataremos aquí de dos de ellas, que tienen que ver con el tema que nos ocupa : la tablilla YALE o YBC 7829 y la tablilla PLIMPTON 322 . Ambas pertenecen a la época de Hammurabi o,al menos,están fechadas sobre dicha época;hace unos 3600 ó 3700 años.

Esta tablilla,que se conserva en la Universidad de Yale - de ahí su nombre - ,está fechada hacia el 1600 a. de C.

El número que aparece arriba,en cuneiforme,por supuesto,es el 30; el de la diagonal horizontal es 1.24.51.10 y el que aparece abajo, 42.25.35.

Por ahora,sólo se puede interpretar su relación con el teorema de Pitágoras en un sentido muy primitivo,pues en la tablilla figuran un cuadrado y varios triángulos rectángulos. Pero si pasamos estos números del sistema sexagesimal babilónico,a nuestro usual sistema decimal, la cosa cambia. Veamos:

El número sobre el lado no varía.

El de la diagonal se convierte en 1,414213...que,sorprendentemente,es el valor de $\sqrt{2}$ con una aproximación superior a la que dió Herón de Alejandría muchos siglos después.

Además,al cambiar de base el segundo número se obtiene 42,426 389...,que es el valor de la diagonal del cuadrado de lado 30.

(En realidad,los números son 1,414212963...y 42,42638889...)

Por supuesto que no está explícito el teorema de Pitágoras, pero sí el conocimiento de su contenido;al menos,para un triángulo rectángulo isósceles. La diagonal del cuadrado la obtienen multiplicando el lado por $\sqrt{2}$,o bien,obtienen esta dividiendo la diagonal por el lado, cosa menos probable.

Tablilla
PLIMPTON 322
(Universidad
de Columbia)

Está fechada en algún momento entre el 1900 y el 1600 a.de C. y fue descrita por primera vez, por Neugebauer y Sahs, en 1945.

En ella se da una tabla de quince ternas pitagóricas obtenidas por las fórmulas

$$a = 2uv \quad , \quad \ell = u^2 - v^2 \quad , \quad c = u^2 + v^2$$

donde u y v son enteros positivos primos entre si, y, además, los parámetros u y v usados son números sexagesimales regulares, es decir, números cuyo inverso admite un desarrollo sexagesimal finito. Los babilonios utilizaban estos números para reducir la división a un producto.

a	ℓ	c	u	v	
120	119	169	12	5	
3456	3367	4825	64	27	
4800	4601	6649	75	32	
13500	12709	18541	125	54	
72	65	97	9	4	
360	319	481	20	9	
2700	2291	3541	54	25	
960	799	1249	32	15	
600	481	769	25	12	
6480	4961	8161	81	40	
60	45	75	2	1	(*)

2400	1679	2929	48	25	
240	161	289	15	8	
2700	1771	3229	50	27	
90	56	106	9	5	(*)

Se puede hacer una observación curiosa en esta tabla : No sólo se obtienen ternas pitagóricas, sino que, excepto las relativas a las líneas 11 y 15, marcadas con *(*)*, son ternas pitagóricas primitivas, esto es, M.C.D. $(a,b,c)=1$ y, por tanto, sus múltiplos generan infinitas ternas.

Egipto :

En Egipto se han encontrado varios papiros antiquísimos, como el de Moscú y el más famoso papiro de RHIND, con textos de contenido matemático. El primero, fechado hacia el 1850 a. de C., fue hallado en 1893 y publicado en 1930. El papiro de Rhind, también conocido como "del escriba Ahmés", encontrado en 1858 y publicado en 1930, está fechado hacia el 1650 a. de C.

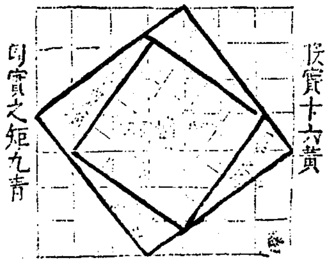
A pesar de su alto contenido matemático, no se menciona en ellos el teorema ni las ternas pitagóricas. Es por esto que, prudentemente, algunos autores afirman que no hay razón para suponer que los egipcios tuvieran estos conocimientos. Sin embargo, es seguro que conocían y utilizaban el hecho de que el triángulo de lados 3, 4, 5 -por cierto llamado egipcio- es rectángulo.

Otto Neugebauer, uno de los estudiosos más prolíficos y serios de la Matemática en la Antigüedad, dice al respecto en un libro publicado en 1934 : " Ninguna fuente conocida habla de la relación entre los cuadrados de los catetos y el de la hipotenusa en forma pitagórica. No obstante, parece muy posible que la Geometría egipcia tuviera conciencia del teorema pitagórico ".

China :

También se ha reivindicado el conocimiento del teorema de Pitágoras para la antigua civilización china. Existen al menos dos trata-dos clásicos chinos con gran contenido matemático:el CHOU-PEI y el CHUI-CHANG SUANG-SHU o "Aritmética en nueve capítulos",el primero quizá más antiguo. Y digo quizá porque han llegado a nuestros días a través de innumerables copias y reposiciones y es difícil fijar una fecha única para ellos. Yoshio Mikami,en su "Development of the Mathematics in China and Japan",da una serie de fechas y valora su veracidad. Sea como fuere, no hay duda de su antigüedad.

En la tablilla de madera,cuya reproducción sigue,aparece una figura que la tradición china asocia al Chou-pei y se ha utilizado para reivindicar el conocimiento del contenido del teorema pitagórico. Veremos más adelante que la probable demostración debida a Pitágoras se basa en un diagrama semejante.



Veamos parte de un diálogo,que aparece en el Chou-pei,entre Chou-Kong,hermano de Wu-Wang,rey de la dinastía Chou,que murió en el 1105 a. de C.,y el sabio Shang-Kao :

- Como he oído que estás versado en el arte de los números, permíteme preguntarte. En las épocas antiguas,Fu-hi midió los cielos y reguló el calendario. Pero,ni los cielos son susceptibles de ser alcanzados,ni la tierra lo es de medición con nuestras medidas. ¿ A partir de dónde,entonces,se deducirán los números?

. El arte de los números se obtiene del círculo y del cuadrado. El círculo se obtiene del cuadrado y el cuadrado del "kuei" o línea en ángulo recto. La línea procede de 9 en 9,lo que hace 81. De este modo,rompe la línea y forma el "kou" o anchura 3 y el "ku" o longitud 4 ; entonces,la distancia que une los extremos es 5.

Toma los cuadrados de los números externos y,partiendo *por la mitad, se obtiene la línea.*

Esta última frase, muy difícil de interpretar, hay quien la entiende así: Tomando la suma de los cuadrados de los lados de un triángulo rectángulo y extrayendo su raíz cuadrada, se obtiene la hipotenusa.

Y Shang-Kao continúa:

. *Rodeando* (un espacio), *sitúalo en la pizarra. Cuando obtenemos 3,4,5, para los dos son 25, lo que llamamos "chi-chü" o lo que permanece de "chü". Por tanto, los medios que utilizó YU para regir el mundo nacen de estos números.*

El "Aritmética en nueve secciones" es el más antiguo tratado que ha llegado hasta nuestros días. En su último capítulo se enuncia el teorema de Pitágoras así :

"Cuadra el *kou* y el *ku* (catetos) y añádelos juntos. Entonces, la raíz cuadrada (de la suma) es el ***hsien*** (hipotenusa)."

Además, "cuando el cuadrado del *ku* es sustraído del cuadrado del *hsien*, la raíz del resultado es el *kou*". Y también : "cuando el cuadrado del *kou* es sustraído del cuadrado del *hsien*, la raíz del resultado es el *ku*"

Es evidente aquí el conocimiento, aunque sin demostración, del teorema que nos ocupa.

Aparecen también en este tratado problemas como los siguientes:

" Dada una puerta de la cual la altura supera al ancho en 6 *chih* 8 *Ts'un*, la distancia máxima entre los vértices es 1 *chang*. ¿Cuál es la altura y anchura? (1 chang=10 chih =100 Ts'un) (Obsérvese que el sistema de unidades es decimal. Los chinos lo emplearon aun antes del período Chou, anterior al 1030 a. de C.)

" Crece en medio de una charca circular de 10 *chih* de diámetro, un junco que sobresale 1 *chih* sobre el agua. Cuando se inclina, llega justo al extremo de la charca. ¿Qué profundidad tiene el agua?

Este problema viene resuelto con una regla, expresada en palabras que es el equivalente a

$$\text{profundidad} = \frac{(\text{diámetro})^2 - (\text{lo que sobresale del agua})^2}{2.(\text{lo que sobresale del agua})}$$

Notas:

He tomado el diálogo de "Mathematics in China and Japan", de Yoshio Mikami. La traducción es mía.

La traducción del enunciado del teorema y los problemas, la he hecho de "Introduction to the History of Mathematics", de Howard Eves. No resistí la tentación de cambiar "pies" por "*chih*" en el segundo problema.

<u>India</u> :

En los "Elementos de Historia de las Matemáticas" de BOURBAKI, en la nota 2 al pie de la página 174, dice:

".....los hindúes tuvieron la idea de algunos principios de demostración de este teorema totalmente distintos de los que se encuentran en Euclides....."

Se refiere Bourbaki a las demostraciones del monje matemático hindú Bhaskara, de la Edad Media, no a que los hindúes de la Antigüedad poseyeran una demostración del teorema pitagórico.

No obstante, en los antiguos Sulvasutras aparecen testimonios de que usaron de forma práctica conocimientos de Geometría para la construcción de altares ; entre ellos el teorema que nos ocupa.

<u>Otras civilizaciones antiguas</u> :

No se tienen noticias, o al menos yo no las conozco, de que otras civilizaciones conocieran el teorema de Pitágoras. No lo conocían las grandes civilizaciones americanas ni las del subcontinente africano.

Como resumen de lo expuesto, reproduzco la afirmación de Otto Neugebauer en su libro "The exact Sciences in the Antiquity" :

"Me parece evidente que las narraciones tradicionales de los descubrimientos hechos por Thales y Pitágoras deben ser descartadas co -

mo totalmente ajenas a la Historia. Sabemos hoy que todo el conocimiento matemático real que se atribuye a los primeros filósofos griegos, se tenía ya muchos años antes, aunque sin la evidencia que les acompaña,..., la cual los matemáticos del siglo IV habrían llamado prueba"

ALGUNAS DEMOSTRACIONES CURIOSAS

No vamos a entrar aquí en consideraciones que nos diluciden el porqué en las civilizaciones antiguas no aparecen pruebas del teorema de Pitágoras y, sin embargo, surgen en la civilización mediterránea de Grecia. Lo cierto es que es aquí, según lo que se sabe actualmente, donde, por primera vez, aparece la demostración matemática.

Y, antes de nada, una aclaración: A diferencia de Babilonia y Egipto, no se conocen fuentes primarias de las Matemáticas de los antiguos griegos. La fuente principal es el llamado *Sumario Eudemiano* de Proclo, del siglo V después de Cristo. Son las primeras páginas del comentario de Proclo al Libro I de Euclides y constituyen, a su vez, un resumen de otro libro, hoy perdido, de Eudemio, discípulo de Aristóteles.

Sin embargo, los estudiosos de la historia de la Matemática, con gran ingenio y paciencia, han construido una historia, aunque hipotética, bastante consistente. Estos hombres son : PAUL TANNNERY, T.L.HEATH, H.G. ZEUTHEN, A.ROME, J.L.HEILBERG y E.FRANK.

La demostración de Pitágoras

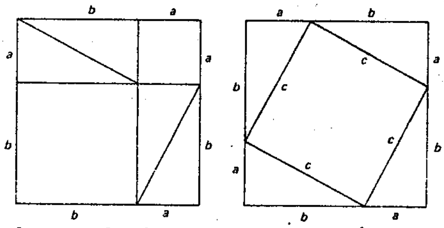
Es opinión unánime que, aunque las civilizaciones antiguas conocieron el contenido del teorema, fue Pitágoras (540 a.d.C.) el primero que dio una prueba general de él. Probablemente fuera la siguiente :

Dado un triángulo rectángulo de catetos a y b e hipotenusa c, construimos un cuadrado de las dos maneras siguientes:

1) Mediante los cuadrados de lados a y b, colocados como indica la figura, y completados con cuatro triángulos iguales al original en las posiciones que se indican. El cuadrado resultante tiene, como se ve, $a + b$ de lado. (Fig. 1).

2) Construyendo un cuadrado de lado c y, con él, formando otro

mediante el añadido de los cuatro triángulos iguales al dado, en las posiciones que muestra la Fig.2 y que, evidentemente, tiene también $a + b$ de lado.



Como los dos cuadrados poseen igual área, si sustraemos las de los cuatro triángulos en cada caso, las áreas de las figuras resultantes han de ser iguales. Por tanto, "la suma de los cuadrados de los catetos es igual al cuadrado de la hipotenusa".

Esta demostración lleva implícitos conocimientos como el de la suma de los ángulos de un triángulo; pero este tipo de inconvenientes había sido ya solucionado por Thales

Con la demostración del teorema no se da ningún método para hallar números enteros que cumplan la relación pitagórica. Los pitagóricos se dedicaron a este problema y llegaron a una fórmula para obtener ternas pitagóricas con un sólo parámetro. La fórmula que se les atribuye es

$$m^2 + \left(\frac{m^2-1}{2}\right)^2 = \left(\frac{m^2+1}{2}\right)^2 \quad , \text{ para todo } m \text{ impar.}$$

Una fórmula parecida, aunque genera ternas distintas, se le atribuye a Platón(380 a.d.C) :

$$(2m)^2 + (m^2-1)^2 = (m^2+1)^2 \quad , \text{ para todo } m \text{ entero.}$$

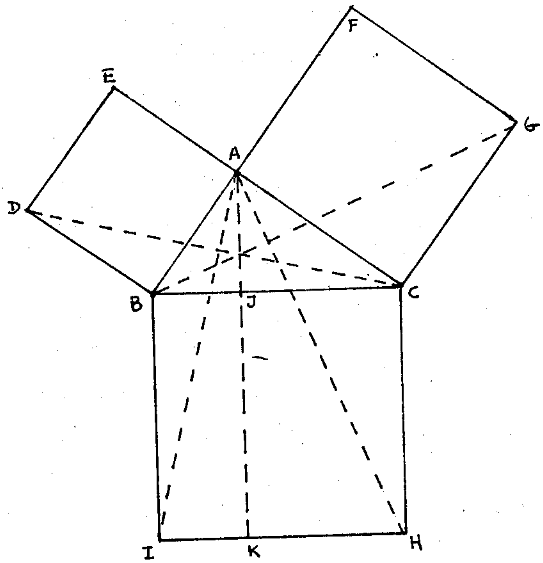
He aquí algunas de las ternas que pueden obtenerse con ambas fórmulas:

Pitagórica	Platónica
3 , 4 , 5	4 , 3 , 5
5 , 12 , 13	6 , 8 , 10
7 , 24 , 25	8 , 15 , 17
9 , 40 , 41	10 , 24 , 26

Demostración de Euclides

La demostración atribuida a Pitágoras aparece en los Elementos de Euclides (300 a.d.C.). Mucho del conocimiento del Libro I se debe a los pitagóricos. No obstante, en la proposición 47 da una demostración muy elegante del teorema que tratamos, que se le atribuye como propia. En esencia es la siguiente:

Sea el triángulo rectángulo ABC. Construimos cuadrados sobre los lados y nombramos los vértices según la figura.



Trazamos los segmentos auxiliares DC , BG , AI , AH y la altura correspondiente al vértice A, que corta al lado BC en J y a IH en K.

a) Demostremos primero que los triángulos DBC y ABI son iguales. Lo son porque $AB = BD$, $BI = BC$ y, además, el ángulo B del triángulo DBC es igual al ángulo B del ABI.

b) El cuadrado $ABDE$ es igual en área al doble del triángulo DBC, ya que la base y la altura de este son lados de aquel.

c) El rectángulo $BIKJ$ es igual en área al doble del triángulo ABI por la misma razón anterior.

Así pues,

$ABDE = 2.\ DBC = 2.\ ABI = BIJK$

Siguiendo el mismo razonamiento con el otro cuadrado, resulta

$ACGF = 2.\ BCG = 2.\ ACH = CHKJ$

Y, sumando miembro a miembro ambas igualdades,

$ABDE + ACGF = BIHC$, con lo que queda demostrado el teorema.

Por supuesto, el bagaje de conocimientos geométricos necesario para la demostración anterior es mucho mayor que el atribuido a Pitágoras. En el Libro I, Euclides los desarrolla previamente. Son los relativos a la teoría de proporciones, semejanza de triángulos, áreas de figuras planas, etc.

Otra demostración curiosa

En algunos de los problemas de Herón de Alejandría, que vivió probablemente en la segunda mitad del siglo I, aparecen las fórmulas siguientes

$$a\ ,\ b = \frac{(r + s) \pm \left[(r + s)^2 - 8rs\right]^{1/2}}{2} \quad ,$$

donde a y b son los catetos de un triángulo rectángulo de perímetro $2s$ y de radio inscrito r.

Si se fijan verán que se trata de las soluciones de una ecuación de segundo grado. El planteo de esta se puede hacer como sigue y, posiblemente, así se obtuvo. Veamos:

Consideremos un triángulo rectángulo ABC, de lados a, b, c. Sean M, N, P los puntos de tangencia de la circunferencia inscrita de centro O. Así, el triángulo dado puede descomponerse en suma de los triángulos AOC, AOB y BOC. Por tanto,

$$ar/2 + br/2 + cr/2 = ab/2$$

Ahora bien, es fácil ver (sacando factor común y simplificando) que el primer miembro es igual a sr , donde s es el semiperímetro. En consecuencia,

$$(1) \quad ab = 2sr$$

Por otro lado, las rectas que unen los vértices con O son bisectrices de los ángulos del triángulo. Por tanto,

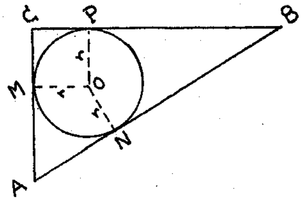
$CP = CM = r$; $BP = BN$ y $AN = AM$

Se deduce de aquí que

$s = CM + BN + AM$ y $a + b = CM + BN + AM + CP$

y, entonces,

(2) $a + b = s + r$



Así pues, la ecuación buscada sería la obtenida por el sistema formado por (1) y (2).

Inmediatamente se puede obtener que la hipotenusa es

$c = s - r$

Y así, con las fórmulas que relacionan los lados del triángulo con el semiperímetro y el diámetro de la circunferencia inscrita, y un poco de Algebra elemental, se puede demostrar el teorema que nos ocupa. Sólo hay que verificar que

$$\left[\frac{(r+s) + \sqrt{(r+s)^2 - 8sr}}{2}\right]^2 + \left[\frac{(r+s) - \sqrt{(r+s)^2 - 8sr}}{2}\right]^2 = (s-r)^2$$

de donde

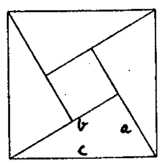
$$a^2 + b^2 = c^2$$

Las demostraciones de Bhaskara

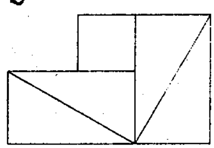
El monje y matemático hindú Bhaskara nació en el 1114 y murió en 1185. Posee dos pruebas originales del teorema de Pitágoras. Una de ellas es la que sigue:

Sea un triángulo rectángulo de lados a, b, c. Se construye un cuadrado de lado c (hipotenusa) y se corta según la fig. 1. Luego, lo reordenamos como en la fig. 2.

1

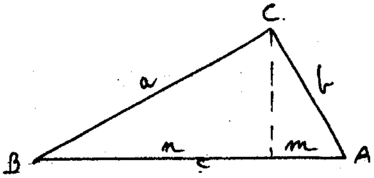


2



En la fig.2 aparece la suma de los cuadrados de los catetos, pues el cuadradito pequeño tiene de lado $b-a$. Así pues, se demuestra que el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos.

La otra prueba es, básicamente, la que aparece en LECCIONES DE MATEMATICAS I, editadas por la S.C.P.M. Fue redescubierta en el siglo XVII por John Wallis. En notación actual, tal demostración es así :



Dado el triángulo de la figura, trazamos la altura h. Por la semejanza de los triángulos ACH y CHB y ACB, obtenemos

$c/b = b/m$ y $c/a = a/n$

Por tanto,

$b^2 = cm$ y $a^2 = cn$

Y, finalmente,

$a^2 + b^2 = c(m + n) = c^2$

Uno de los problemas contenidos en el LYLAVATI de Bhaskara es muy bonito por el sabor oriental que desprende. Dice así :

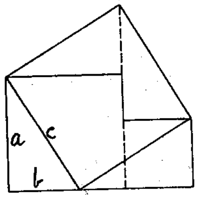
" Una madriguera de serpiente está al pie de un pilar de 15 *cubits* de altura, y un pavo real está posado encima. Viendo una serpiente, a una distancia de tres veces la altura del pilar, que huye hacia la madriguera, se lanza oblicuamente hacia ella. Diga rápidamente, avispado lector, a cuántos *cubits* de la madriguera se encontrarán si ambos recorren la misma distancia."

El problema se reduce a aplicar el teorema de Pitágoras y resolver una ecuación de primer grado.

La demostración de Tabit-ibn-Quorra (826-901)

Se sabe que este gran matemático árabe conoció una demostración original, publicada por primera vez en 1873 por Perigal.

Se trata de una prueba del tipo congruencia por sustracción y se basa en el siguiente diagrama



Aunque es prácticamente visual, apuntaré el proceso de demostración:

Sea un triángulo rectángulo de catetos a, b e hipotenusa c. Construimos un cuadrado de lado a, como muestra la figura, y otro adyacente de lado b. Si a la figura resultante, le sustraemos dos triángulos iguales al original en los lugares indicados y los colocamos en la parte alta de los antiguos cuadrados, obtenemos un cuadrado cuyo lado es la hipotenusa.

Tabit-ibn-Quorra tiene también una curiosa generalización del teorema, que veremos más adelante.

Nasir ed-din (1201-1274), también matemático árabe, tiene una prueba original que, esencialmente, es la misma que se sugerirá para la generalización de Papo (o Papus) cuando tratemos de las generalizaciones del teorema.

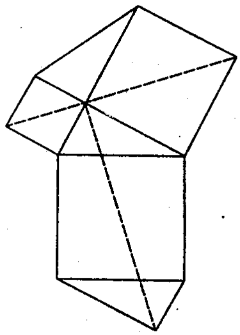
La demostración de Leonardo da Vinci

No debe extrañar que también el gran genio del Renacimiento posea una demostración original. Es una prueba por disección del tipo congruencia por sustracción. Veámosla :

Sea un triángulo de lados a, b, c, siendo c la hipotenusa. Construyamos cuadrados de lados a y b y situémoslos uno al lado del otro de manera que sus diagonales estén sobre una misma recta. Completemos la figura con dos triángulos iguales al dado. Dividamos en dos partes iguales según una recta común a las diagonales.

Por otro lado, construimos el cuadrado de la hipotenusa sobre uno de los triángulos añadidos y, debajo de él, completamos con otro triángulo igual al original. Dividimos en dos esta nueva figura, por la recta que une los dos vértices de los triángulos correspondientes a los ángulos rectos.

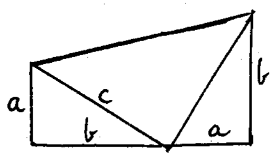
Las dos nuevas partes son iguales entre si e iguales a las resultantes de la división anterior, lo que demuestra el teorema.



La prueba de James Abram Garfield

Ostentó la presidencia de los Estados Unidos sólo durante un año, ya que fue nombrado en 1880 ...y lo mataron en 1881. En su época de estudiante publicó la siguiente demostración:

Calculando el área del trapecio de la figura de dos formas, como $(a + b)^2 / 2$ y como $c^2/2 + ab$ e igualando, se obtiene la relación de que tratamos.



La demostración de H. E. Dudeney

Howard Eves cita en su libro "Introduction to the history of Mathematics" que, en 1917, Dudeney presentó una prueba por congruencia por adición basada en el diagrama que adjuntamos y cuyo razonamiento deja -

mos al lector. Joseph M. Madachy, editor del Journal of Recreational Mathematics on Vacation, dice, sin embargo, que esta prueba es muy antigua. No sé...

Los interesados en otras pruebas del teorema en cuestión, vean el libro de Loomis citado en la Bibliografía que acompaña a este trabajo.

GENERALIZACIONES

El inverso del teorema

En la proposición I-48 de sus Elementos, Euclides lo enuncia más o menos así :

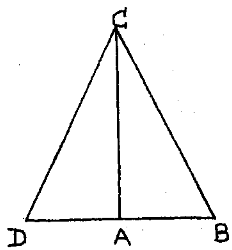
" Si en un triángulo el cuadrado sobre uno de los lados es igual a los cuadrados sobre los restantes dos lados, el ángulo contenido por los restantes dos lados del triángulo es recto ".

La demostración corre así:

Para el triángulo ABC, sea el cuadrado sobre el lado BC igual a los cuadrados sobre los lados BA y AC.

Digo que el triángulo BAC es rectángulo.

Construyamos AD desde el punto A en ángulo recto a la recta AC, hagamos AD igual a BA y unamos D con C.



Como DAC es recto (por construcción), el cuadrado de DC es igual a los cuadrados sobre DA y AC, esto es, $CD^2 = DA^2 + AC^2$

Por otro lado, por hipótesis se tiene

que $\quad CB^2 = AB^2 + AC^2$

y, además, $\quad AB = DA$

Se tendría $CB^2 = CD^2$ y, por tanto, los dos triángulos tienen los tres lados iguales, de lo que es fácil deducir que el ángulo BAC es recto. (Tomado de la versión inglesa de T.H.Heath).

Este teorema, como casi todo el contenido del Libro I de Euclides, era conocido por los pitagóricos. Si lo conocía o no el propio Pitágoras, no está claro. Al respecto dice Heath : "El problema de determinar cuántos de los descubrimientos en Matemáticas pueden ser atribuidos a Pitágoras, no es fácil; se puede decir que es insoluble".

El teorema del coseno

Esta generalización, que aparece en el Libro II de Euclides como proposiciones 12 y 13, responde más o menos a la siguiente pregunta: *¿cuál será la relación de los lados en un triángulo cualquiera?*

Dichas proposiciones, establecidas juntas y en lenguaje moderno, dicen:

" En un triángulo obtusángulo (acutángulo), el cuadrado del lado opuesto al ángulo obtuso (agudo) es igual a la suma de los cuadrados de los otros dos lados aumentada (disminuida) en el doble producto de uno de estos lados por la proyección del otro sobre él "

Es, por supuesto, el conocido teorema del coseno. Y, en el caso particular de que el ángulo sea recto, el de Pitágoras.

En lenguaje de Euclides, la proposición II-12 está redactada así: " En un triángulo obtusángulo, el cuadrado del lado opuesto al ángulo obtuso es mayor que los cuadrados sobre los lados que forman el ángulo obtuso en el doble del rectángulo formado por uno de los lados del ángulo obtuso, precisamente aquel sobre el que se traza la perpendicular, y la línea recta que corta fuera por la perpendicular hasta el ángulo obtuso ".

La proposición II-13 está redactada en términos parecidos.

La demostración es muy sencilla pues consiste, en esencia, en aplicar el teorema de Pitágoras a los dos triángulos rectángulos que se forman cuando se traza la altura por uno de los vértices adyacentes al considerado.

Herón se considera el autor de los teoremas inversos de las proposiciones 12 y 13, es decir, probó que "si en un triángulo, el cuadrado de un lado es mayor (menor) que la suma de los cuadrados de los restantes lados, el ángulo formado por dichos restantes lados es obtuso (agudo).

Otra pregunta que puede hacerse con relación a generalizar el teorema de Pitágoras es :

¿Las únicas figuras que se pueden construir sobre los lados para que se cumpla el teorema, son cuadrados? ¿No es válido también para otras figuras?

En el Libro IV de los Elementos aparece una generalización en la que, en vez de cuadrados, utiliza figuras cualesquiera similares y similarmente situadas sobre los lados de un triángulo rectángulo. En general, esto se cumple siempre y cuando el área de la figura utilizada sea $f(a^2)$ y, además, esta función sea tal que

$$f(a^2) + f(b^2) = f(a^2+b^2)$$

Cumple esta relación, por ejemplo, un círculo de diámetro dado, es decir, "el área del círculo construido sobre la hipotenusa es igual a la suma de las áreas de los círculos construidos sobre los catetos", tanto si "construido" significa que los círculos tengan por radios los lados o tengan estos por diámetros.

Este tipo de generalización nos proporciona un método sencillo de resolución de problemas como el siguiente:

"Dados dos n-ágonos regulares de lados conocidos, se pide calcular el lado de un n-ágono regular de área la suma de los dos"

La generalización de Papus.

Papus, en el siglo III, dio también una generalización curiosa. Además de considerar un triángulo cualquiera, construye sobre los lados paralelogramos cualesquiera, con cierta restricción, sin exigirles que sean semejantes. Su generalización dice así :

"Sea ABC cualquier triángulo y $ABDE$ y $ACFG$ paralelogramos arbitrarios construidos externamente sobre AB y AC. DE y FG se cortan en H. Construya BL y CM iguales y paralelos a HA. Entonces,

$$\square BCML = \square ABDE + \square ACFG$$

Su prueba se basa en lo siguiente: Sea U el punto de corte entre DE y BL , y V el punto de corte entre GF y CM. Entonces, el área de $ABDE$ es igual al área de $ABVH$, pues ambos tienen iguales la base y la altura. A su vez, el área de $ABVH$ es, por la misma razón, igual a la de $BLSR$. Así pues

$$ABDE = BLSR$$

El mismo razonamiento para el otro lado conduce a que

$$ACFG = RCMS$$

Ahora bien, como

$$BLSR + RCMS = BCLM$$

se tiene

$$ABDE + ACFG = BCLM ,$$

lo que demuestra el teorema.

Si en lugar de paralelogramos y un triángulo cualquiera, se utilizan cuadrados y un triángulo rectángulo, se llega a la demostración de Nasir ed-din del teorema de Pitágoras.

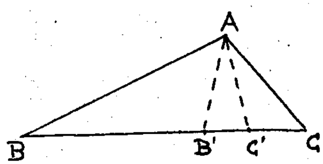
El teorema de Papus puede ser generalizado al espacio de tres dimensiones reemplazando el triángulo por un tetraedro, y los paralelogramos por prismas triangulares sobre las caras del tetraedro.

La generalización de Tabit ibn Quorra.

"Si en un triángulo ABC cualquiera, B' y C' son puntos sobre BC tales que $\widehat{AB'B} = \widehat{AC'C} = \widehat{A}$, entonces

$$AB^2 + AC^2 = BC(BB' + CC')"$$

La demostración es la siguiente:



Los triángulos ABC y $B'BA$ son semejantes, ya que $\widehat{A} = \widehat{B'}$ y el $\widehat{B}$ es común. Por tanto,

$AB / BC = BB' / AB$, es decir, $AB^2 = BC \cdot BB'$

Haciendo el mismo razonamiento sobre el triángulo $C'CA$, obtenemos

$$AC^2 = BC \cdot CC'$$

Y, sumando miembro a miembro, $AB^2 + AC^2 = BC(BB' + CC')$,

que es lo que queríamos demostrar.

El teorema en la geometría de LOBACHÉVSKI

Es probablemente esta la más sorprendente de las generalizaciones. Dice así : " Si a , b , c son los catetos y la hipotenusa de un triángulo rectángulo, entonces, en lugar del teorema de Pitágoras, se verifica que

$$2\,(\,e^{c/k} + e^{-c/k}\,) = (\,e^{a/k} + e^{-a/k}\,)\,(\,e^{b/k} + e^{-b/k}\,)\,,$$

donde k es un parámetro que, cuando tiende a infinito, el espacio tiende al euclídeo ".

Desarrollando en serie la expresión anterior, resulta

$$c^2 + c^4/12k^2 + \ldots = a^2 + b^2 + (a^4 + 6a^2b^2 + b^4)/\,12k^2 + \ldots$$

BIBLIOGRAFIA

EVES, H. - An introduction to the history of Mathematics - 4th. edit. 1976 - Holt, Rinehart and Winston - New York. (Contiene problemas y una buena bibliografía).

LOOMIS, E.S. - The Pythagorean Proposition - 2nd. ed., 1940- Es una impresión privada de Ann Arbor, Michigan. Reimpreso por Bell and Howell, Cleveland-Ohio. Existe también una edición del National Council of Teachers in Mathematics.

MIKAMI, Y. - The development of Mathematics in China and Japan -Hafner, 1913 - New York. Reimpreso por Chelsea, 1961.

HEATH, T.L. - The Thirteen Book of Euclid's Elements - 2nd. ed., 3 vols. - New York, Cambridge University Press, 1926. Reimpreso por Dover, 1956, New York.

NEUGEBAUER, O. -The exact Sciences in Antiquity - 2nd. ed.- New York, Harper and Row, 1962.

ALEKSANDROV y otros - La Matemática: Su contenido, métodos y significado - Alianza Universidad.