CALCULO DE LOS DIVISORES :
Una aproximación intuitiva al análisis combinatorio en E.G.B.

(Hacia un estudio razonado del M.C.D.)

Fidela Velázquez Manuel
C.P.P. "Las Delicias"
Sta. Cruz de Tenerife

Dentro de la enseñanza de la Matemática siempre nos ha atraído el enfoque dado por Dienes en el sentido de que se establezcan situaciones plenamente creadoras para conseguir un aprendizaje efectivo. Cuando el niño crea afectivamente un concepto,dice Dienes,crea a partir de su propia experiencia algo que antes no existía. Esta construcción personal de la Matemática,que le da margen para trabajar por sí sólo,admitiendo la posibilidad de que pueda confundirse,invitándolo a investigar y preparándolo para resolver situaciones problemáticas,constituye la más fuerte motivación.

Efectivamente,esta forma de adquirir los conocimientos le va a liberar de una Matemática que se le presenta como algo abstracto y difícil,que propone sólo mecanismos operatorios que no puede analizar por cuanto no los ha construido; una Matemática,en suma,inactiva y memorística.

Cuando,dentro del campo de la Matemática,tratamos de elegir entre un trabajo constructivo y otro más analítico,observamos que el primero es más adecuado para los niños de los primeros cursos de E.G.B.,pero en el ciclo superior -a comienzos del cual está encuadrado el tema que nos ocupa-,los niños tienen ya la madurez suficiente para la apreciación analítica,de forma que ya empiezan a interesarse por cuestiones que implican alguna demostración. Por esta razón,se les puede introducir progresivamente en el análisis pero, siempre que sea posible, debe hacerse a través de un trabajo constructivo.

En este aspecto, y en orden a seguir el aprendizaje lógico de la Matemática que la Psicología Evolutiva, con Piaget al frente, considera, nos hemos propuesto que los alumnos adquieran, mediante adecuadas técnicas combinatorias intuitivas como experiencias de análisis, el mecanismo de la deducción lógica. Este mecanismo va a llevarles, por un lado, a la construcción autónoma de conceptos matemáticos; por otro, va a permitirles la utilización del mismo principio en los ejercicios de aplicación.

Nuestro objetivo final será, una vez que el niño haya entendido el sentido de la operación y su fundamento, y sólo entonces, lograr que alcance una adecuada manipulación de datos y un cálculo rápido y exacto, según propugna el Committee of International Study of Achievement in Mathematics.

Concretamente, y en orden a conseguir un estudio razonado del M.C.D., consideramos que existe un paso previo, generalmente desaprovechado, que se constituiría por si sólo en una clara y adecuada metodología del tema. Nos referimos al estudio exhaustivo de los divisores de un número.

METODOLOGIA

El tiempo estipulado para el desarrollo de los items es inicialmente de una quincena, lo que a simple vista podría parecer excesivo ante un tema que los textos despachan habitualmente en unas pocas líneas y con uno o dos ejercicios de aplicación. No obstante, esta temporalización se nos antoja adecuada si tenemos en cuenta una serie de factores, como son:

1º Hay que iniciar a los alumnos en el concepto de potencia, para que, como ejercicio de análisis elemental, inicien y se familiaricen con el cálculo de los divisores de una potencia; por ejemplo:

$$D\ 2^4 = \left\{2^1, 2^2, 2^3, 2^4\right\}$$

2º La combinatoria elemental o intuitiva, como cualquier otra adquisición matemática, exige un proceso de acople sólo posible de conseguir por parte del alumno cuando sus adquisiciones se hagan con paso firme y de forma razonada, de manera que obtenga "la motivación por el éxito" que propugna Bloom. Evidentemente, el éxito genera éxito y el fracaso genera fracaso y, sobre todo en Matemáticas, el problema más grave es que los alumnos no se atreven a operar o a crear situaciones matemáticas por temor al fracaso.

3º Hay que habituar al alumno a una comprobación ulterior de los resultados obtenidos, por lo que es necesario enseñarles reglas de verificación, que no aparecen regularmente en los textos ni en las disposiciones oficiales. En el caso que nos ocupa, ha de habituársele a efectuar sistemáticamente la comprobación de si ha obtenido todos los divisores, aplicando la regla

$$\text{Nº de divis. de } a^m . b^n . c^p = (m+1).(n+1).(p+1)$$

4º Hay también que acostumbrarlo a incluir sistemáticamente los divisores triviales.

El cálculo de los divisores es un aspecto generalmente abandonado de entre los contenidos pertenecientes al tema 2º que los Programas Renovados de E.G.B. establecen para el sexto nivel. Por otro lado, dicho tema figura en el curriculum escolar desde planes más antiguos, pero, posiblemente por no haber caído en la cuenta del amplio abanico de posibilidades que abre el tratar debidamente dentro de él el cálculo de divisores, éste ha estado relegado a la consideración de un ejercicio más, no de los más abundantes, ni al que se concede mayor importancia. Creemos que el tratamiento riguroso de este aspecto y la consiguiente ejercitación, es lo que va a permitir que el alumno llegue a comprender plenamente el significado conceptual del m.c.d.

A este fin, desarrollamos un proceso didáctico que tiene su justificación en las líneas trazadas por las teorías del aprendizaje de la Matemática de Piaget, Bruner y Dienes. De acuerdo con ellas, la metodología que propugnamos está en la línea de los principios de aprendizaje lógico de la Matemática, a saber :

. Dinamicidad.- Se propondrá a los niños juegos preliminares que les sirvan de indispensable experiencia para que, finalmente, puedan formar el concepto matemático de divisores de un número. En una primera etapa, les entregaremos las fichas previamente elaboradas, para guiarlos en la comprensión del significado de una potencia y de cuáles son sus divisores. En esta etapa, el niño se lanzará a la actividad manipulativa de las fichas y encuentra satisfacción en la actividad misma, en su juego. En un paso posterior, esta etapa va a estar más dirigida, más orientada, buscando unas relaciones que, en nuestro caso, consistirán en dar igual color a las distintas potencias del mismo número primo, así como asignar creciente o decrecientemente todos los divisores a una potencia.

. Constructividad.- En la estructura de los juegos, la construcción precederá siempre al análisis.

. Variabilidad matemática.- Los conceptos que encierran más de una variable deben ser estudiados mediante experiencias que supongan el manejo del mayor número posible de aquellas. En esta línea, se encuadra el distinto número de fichas de potencias en distintos colores según sean de uno u otro número primo, así como las combinaciones posibles entre ellas, de modo que se combinen sólo dos o más colores distintos cada vez, y de forma que dos colores diferentes se toman una sola vez en cada combinación (da buen resultado seguir la sencilla regla de empezar por las potencias más simples, siguiendo el orden de izquierda a derecha y de arriba abajo). En este momento, la experiencia concreta alcanza su punto culminante. Hay una comprensión clara cuando se traspasa del juego a la comprensión del número y el niño siente que comprende, que ha " creado" los divisores. En esta fase aparece la elaboración del concepto, siendo etapa de juegos dirigida a la adquisición de conceptos nuevos o destinados a complicar formalmente el método, momento en que podemos culminar el proceso con la explicación del método a seguir para comprobar si hemos obtenido todos los divisores posibles.

. Variabilidad perceptiva.- Para que los niños vayan adquiriendo el sentido matemático de una abstracción, la misma estructura conceptualdeberá ser presentada de tantas maneras perceptivas equivalentes como sea posible. Así, los alumnos captarán lo que hay de común en esas distintas situaciones y eso es lo que constituye el concepto matemático. En ese momento, se pasará a la etapa de aplicación en que incorporaremos el concepto en nuestras experiencias y que nos servirá para adquisiciones posteriores (m.c.d.).

Ejemplos :

. Cálculo de los divisores de 81

$81 = 3^4$

$3^4 = 3.3.3.3$

$D\ 81 = \left\{3\ ,\ 3.3=9\ ;\ 3.3.3=27\ ;\ 3.3.3.3=81\ ,\ 1\right\}$ y, de forma simplificada:

$D\ 81 = \left\{3\ ,\ 9\ ,\ 27\ ,\ 81\ ,\ 1\right\}$

Comprobación:

Nº de div. de $3^4 = 4+1=5$.

. Cálculo de los divisores de 12

$12 = 2^2.3 = 4.3$

$D\ 12 = \left\{2\ ,\ 4\ ,\ 3\ ,\ 2.3\ ,\ 4.3\ ,\ 1\right\} = \left\{2\ ,\ 4\ ,\ 3\ ,\ 6\ ,\ 12\ ,\ 1\right\}$

Comprobación :

nº D 12 = (2+1) . (1+1) = 6

. Cálculo de los divisores de 120

$120 = 2^3.3.5 = 8.3.5$

$$D\ 120 = \left\{\begin{matrix}2\ ,\ 4\ ,\ 8\ ,\ 3\ ,\ 5\ ,\ 2.3\ ;\ 2.5\ ,\ 4.3\ ,\ 4.5\ , \\ 8.3\ ,\ 8.5\ ,\ 3.5\ ,\ 2.3.5\ ,\ 4.3.5\ ,\ 8.3.5\ ,\ 1\end{matrix}\right\}$$

$$D\ 120 = \left\{\begin{matrix}2\ ,\ 4\ ,\ 8\ ,\ 3\ ,\ 5\ ,\ 6\ ,\ 12\ ,\ 24\ ,\ 10\ ,\ 20\ , \\ 40\ ,\ 15\ ,\ 30\ ,\ 60\ ,\ 120\ ,\ 1\end{matrix}\right\}$$

Comprobación :

nº D 120 = (3+1). (1+1).(1+1) = 4.2.2 = 16

De esta forma, la complicación formal puede aumentar gradualmente, puesto que a partir de cierto momento el problema numérico se constituye en la ejercitación lúdica del alumno, sustituyendo a las fichas. Una variedad de ejercicios de cálculo de divisores adecuadamente elegidos, conseguirá que esta ejercitación lúdica aparezca lo más rápidamente posible y, para ello, se utilizarán textos variados, o bien serán propuestos por el profesor.

MODELO DE FICHAS

$2^1 =$ 2	$2^2 = 2.2 =$ 4	$2^3 = 2.2.2 =$ 8	$2^4 = 2.2.2.2 =$ 16	$2^5 = 2.2.2.2.2$ 32
$3^1 =$ 3	$3^2 = 3.3 =$ 9	$3^3 = 3.3.3 =$ 27	$3^4 = 3.3.3.3 =$ 81	
$5^1 =$ 5	$5^2 = 5.5 =$ 25	$5^3 = 5.5.5 =$ 125	$5^4 = 5.5.5.5 =$ 625	
$7^1 =$ 7	$7^2 = 7.7 =$ 49	$7^3 = 7.7.7 =$ 343	$7^4 = 7.7.7.7 =$ 2401	

Las reglas del juego de los divisores :

1. Todas las fichas de igual color representan potencias de un mismo número, trabajando siempre con las potencias de números primos. Ejemplo: amarillo para todas las potencias de 2 , azul para las de 3 ,..

2. Toda potencia de un número incluye siempre, como divisores, a todas las potencias de ese número; desde la de exponente 1, hasta la de exponente igual a la del número que nos ocupa. Ej.: 2^4 incluye como divisores a 2^1 , 2^2 , 2^3 y 2^4.

3. Nunca se pueden combinar fichas de igual color.

4. Con fichas de distinto color hay que agotar todas las combinaciones posibles.

5. Para evitar olvidar alguna combinación o repetir alguna, es conveniente combinar las fichas siguiendo la regla "de arriba a abajo y de izquierda a derecha".

6. Dos fichas dan igual combinación sea cual fuere el orden en que se tomen (siguiendo la regla anterior, no se da el caso de tomarse en distintos sentidos).

7. Siempre el 1 es divisor (trivial), por lo que hay que incluirlo.

8. Si la regla 5 es aplicada, el último número obtenido ha de ser, necesariamente, el otro divisor trivial, es decir, el número al que se le hallan los divisores.

Aplicaciones del cálculo exhaustivo de los divisores de un número

Las aplicaciones del aprendizaje del cálculo exhaustivo de los divisores de un número, aparte de la consecución de objetivos generales y específicos de la asignatura, están en la habituación que se crea en el alumno de sistematizar la obtención de múltiples combinaciones de números, lo que es una aproximación intuitiva al cálculo combinatorio, con lo que tiene de camino de avance para posteriores adquisiciones matemáticas, que generalmente asustan a los alumnos por parecerles nuevas y absolutamente distintas de lo que han hecho hasta entonces.

Por otro lado,y a un nivel más inmediato,el cálculo exhaustivo de divisores va a permitir que el concepto de m.c.d. pueda ser explicado cado de manera razonada como "el mayor de los divisores comunes",hecho que pueden realizar prácticamente sólo si saben como calcular todos los divisores de los números de que se trate. De esta manera se le explica el significado de las siglas de m.c.d.,que habitualmente se soslaya,y cuando ya los alumnos han comprendido el significado del concepto de m.c.d. ha llegado el momento de introducirlos en el cálculo mecánico,aplicando uno cualquiera de los algoritmos al uso. Nosotros normalmente explicamos los algoritmos más usuales,y el alumno,en la práctica,descubre la conveniencia e inconveniencia de cada uno.