LIMITE DE SUCESIONES

Manuel González Dávila
Manuel Martín Fernández
(Miembros del Grupo de Didáctica de la Matemática de Cádiz)

I. APROXIMACION AL CONCEPTO INTUITIVO DE LIMITE DE UNA SUCESION MEDIANTE LA UTILIZACION DE UNA CALCULADORA DE BOLSILLO

La necesidad del uso de calculadoras para una introducción del concepto de límite de una sucesión, obedece al nivel concreto en que se encuentra la mayoría de los alumnos de 2º de B.U.P. Según nos consta por nuestra experiencia, la mayor parte no capta, de entrada, el método riguroso(formal).

Debe comenzarse con ejemplos elementales usuales y, a continuación, abordar problemas de cálculo de límites que, en un desarrollo formal, resultarían muy complejos. Veamos algunos ejemplos en los que se ha trabajado con una Casio f-29 :

(1) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$

n	$\sqrt[n]{n}$
1	1
2	1,4142136
3	1,4422495
4	1,4142136

10	1,2589254
31	1,1171419
84	1,0541635
154	1,0332000
3698	1,0022410
10^6	1,0000138
10^7	1,0000016
10^8	1,0000002
3.10^8	1,0000001
$3,9.10^8$	1,0000001
4.10^8	1
.	.
.	.
.	.
.	1

Es de señalar la poca información que se tiene con valores pequeños de n, y el hecho de que la calculadora toma 1 como valor de $\sqrt[n]{n}$, a partir de un cierto valor de n.

Con estos ejercicios prácticos, el alumno adquiere la idea de límite como número al que se aproximan los términos de la sucesión. Además, pierde el miedo a abordar un problema de cálculo de límite, sea cual fuere su complejidad. Por ejemplo:

$$(2) \quad \lim_{n\to\infty} n \left| \sqrt[3]{8 + 2/n} - 2 \right| = 1/6$$

$$(3) \quad \lim_{n\to\infty} \left| \sqrt[3]{n^3+4} + \sqrt[3]{8n^3 + 4n^2} - 3n \right| = 1/3$$

$$(4) \quad \lim_{n\to\infty} \frac{n^n}{n!\, e^n} = 0$$

$$(5) \quad \lim_{n\to\infty} \frac{\ln(4n^2+2n+1)}{\ln n} = 2$$

Los ejercicios (3) y (4) son buenos ejemplos para aprovechar la memoria de la calculadora (memoria sumativa). Previamente al (4), se introduciría el número e mediante la calculadora:

Con estas prácticas mejoraremos el aprendizaje del uso de la calculadora. Es interesante trabajar cuestiones acerca de errores de redondeo(sólo admite ocho cifras). También, a la vista de las tablas de valores, hacer comparaciones entre distintas sucesiones en cuanto a rapidez de aproximación.

Para evitar la idea de que toda sucesión es convergente, deben proponerse también ejercicios como los siguientes:

(6) $\lim_{n\to\infty} \operatorname{sen} n$

(7) $\lim_{n\to\infty} (-1)^n$

(8) $\lim_{n\to\infty} (-2)^n$

(9) $\lim_{n\to\infty} \cos n$

Veamos, para terminar este apartado, un ejemplo interesante, que hemos resulelto con una Casio fx-20 y tomando $\pi = 3,1416$:

(10) $\lim_{n\to\infty} n^2(1 - \cos 1/n) = 1/2$

n	$1/n$	grados	$\cos 1/n$	$1-\cos 1/n$	$n^2(1-\cos 1/n)$
1	1	57,295645	0.540304	0,459696	0,459696
2	0,5	28,647822	0,877583	0,122417	0,489668
3	0,333..	19,098546	0,944957	0,055043	0,495387
4	0,25	14,323911	0,968913	0,031087	0,497392
.	....	....	....	....	....
.	....	....	....	....	....
19	0,0526	3,015555	0,998615	0,001385	0,499985
20	0,05	2,864782	0,998750	0,001250	0,5 ←
..	......	....	....	....	....
25	0,04	2,2918258	0,999200	0,000800	0,5 ←
..	......	....	....	....	....

En este ejemplo es necesario usar valores pequeños de n. Para valores grandes, la calculadora tomaría $\cos 1/n = 1$ y parecería que el límite es cero.

II. FORMALIZACION DEL CONCEPTO INTUITIVO

La necesidad de formalizar la definición intuitiva de límite de una sucesion, como *número al que se aproximan sus términos*, nos da ocasión para explicar lo relativo a la formalización matemática. Es decir, para que el alumno no sólo sepa una definición formal, sino que comprenda lo que significa la formalización. En 2º de B.U.P. sólo se puede intentar una primera aproximación a esta idea.(1).

Se pretende conseguir que los alumnos comprendan y trabajen la siguiente definición de límite de una sucesión :

" *$\lim (a_n) = \ell$ sii cada entorno de ℓ posee todos los términos de la sucesión, excepto un número finito* ".

O bien : " *En cada entorno de ℓ están todos los términos de la sucesión a partir de uno dado* ".

Para introducir esta definición, habría que definir antes el concepto de entorno de un número ℓ. Esto se puede hacer simplemente como un intervalo abierto que contiene a ℓ. Si se va a trabajar la definición clásica ("para todo $\varepsilon>0$,existe un $n_0 \in N$,..."), es mejor utilizar, en lugar de entornos, entornos simétricos de centro ℓ y radio ε, definiéndolos como intervalos del tipo $(\ell-\varepsilon\ ,\ \ell+\varepsilon)$, con $\varepsilon>0$. Es decir, $E(\ell,\varepsilon) = (\ell-\varepsilon\ ,\ \ell+\varepsilon)\ ,\ \varepsilon>0$.

Por supuesto, se aconseja la representación en la recta real de todo lo que se hace. Conviene insistir en la idea básica de que no hay ningún entorno más pequeño que todos los demás ; si lo hubiera, bastaría comprobar la definición con él y no con todo entorno.

Para introducir la definición dada anteriormente, se aconseja trabajar con un ejemplo de sucesión convergente ,$(1/n)$, y otro de sucesión no convergente, $(-1)^n$, y hacer observar que la diferencia entre ellas se puede formalizar a través del instrumento del entorno. Es conveniente repetir este tipo de ejemplos.

Para trabajar con la definición dada, debiera empezarse por demostrar las propiedaes elementales del concepto introducido, esto es :

(1) Unicidad del límite