

La demostración matemática y los libros de texto de Bachillerato: evolución a través de las leyes educativas

Laura Conejo Garrote
Matías Arce Sánchez
Tomás Ortega del Rincón
(Universidad de Valladolid. España)

1. Introducción

La demostración matemática es uno de los procesos más importantes de las matemáticas, su motor de desarrollo y verificación. Desde la educación matemática también se le atribuye una especial importancia y relevancia en los procesos de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas. Hanna (1995) defiende que la demostración contribuye a la comprensión de los conceptos matemáticos, pues contiene los métodos, herramientas, estrategias y conceptos que se necesitan para resolver problemas, y éstos últimos suponen la esencia principal de las matemáticas (Hanna y Barbeau, 2010). En los últimos 40 años, son múltiples las investigaciones sobre la demostración matemática en el campo de la educación matemática, recogiéndose muchos de sus resultados en diferentes monográficos publicados a nivel internacional sobre el tema (Hanna y de Villiers, 2012; Mariotti, Durand-Guerrier y Stylianides, 2018; Stylianides y Harel, 2018). En la Universidad de Valladolid también se han desarrollado varias investigaciones sobre la demostración matemática, algunas publicadas en la revista *Números*, como las asociadas a las dimensiones de la demostración y su evolución en libros de texto (de ahora en adelante, LT). Para celebrar el número 100 de la revista, revisitamos aquí estos trabajos, presentando una síntesis y reflexión sobre ellos, completando la visión y resultados considerando la nueva ley educativa LOMCE.

2. Investigaciones sobre demostración y libros de texto publicadas en *Números*

Destacamos inicialmente el artículo publicado en el volumen 61 de *Números* (Ibañes y Ortega, 2005). En él, se realiza una revisión de investigaciones sobre la demostración matemática tanto de diversos investigadores de referencia como de otras desarrolladas por los propios Ibañes y Ortega (por ejemplo, Ibañes y Ortega, 1997, 2001). La revisión permite a los autores presentar una caracterización teórica exhaustiva de la demostración matemática atendiendo a cuatro dimensiones: histórica, epistemológica, social y cognitiva. A través de esa caracterización se pretende proporcionar respuesta (o, mejor dicho, respuestas) a los siguientes interrogantes: qué es la demostración matemática, para qué sirve, dónde está su valor y cómo es aprendida por los estudiantes.

Dentro de los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en el aula, es innegable que los LT juegan un papel y tienen una influencia muy importante en ellos, aunque el rol que se le asigne y los usos de él que se hagan puedan diferir mucho de unos docentes a otros. Como afirma Schubring (1987), en la práctica los libros de texto pueden llegar a determinar la enseñanza de un país más que los propios currículos promulgados por las órdenes ministeriales. Así, el análisis de los LT es una línea de investigación necesaria en Didáctica de la Matemática. En un primer acercamiento, Ortega (1996) presentó unas pautas para valorar libros y manuales de matemáticas que fueron



publicadas en el volumen 28 de *Números*. Tratando de aunar las dos líneas de investigación (demostración matemática y libros de texto), se desarrollaron varias investigaciones cuyo objetivo era analizar la presencia y el tratamiento de la demostración matemática en LT. Dos de esos trabajos fueron publicados en *Números*. En el primero de ellos, publicado en el volumen 57 (Ibañes y Ortega, 2004), se presentó un análisis de las demostraciones que presentaban once LT de Matemáticas I de LOGSE en el tema de Trigonometría. Se analizó el tipo de demostración, el método (procedimiento lógico empleado), estilo (procedimiento matemático empleado) y modo empleado (Ibañes y Ortega, 1997), las funciones de la demostración (de Villiers, 1993) reflejadas en el texto, el reconocimiento de procesos y las expresiones que se utilizan al formular los enunciados de los teoremas. Como resultados del análisis, los autores observaron la presencia de uniformidad en los métodos y estilos, la ausencia de referencias en los textos a las funciones de la demostración, la baja presencia de reflexiones sobre la naturaleza del procedimiento y la falta de explicación de significados globales o de conexiones con otros resultados. Así, los autores afirmaban que la presencia de la demostración matemática en dichos textos analizados parecía estar ligada al cumplimiento del rigor en la presentación de resultados, pero no parecía perseguirse un objetivo didáctico que ayudara a hacer comprensible las demostraciones a los alumnos y ayudarles a progresar en el reconocimiento y uso de prácticas demostrativas, para lo cual los autores reclamaban soluciones.

Años más tarde, y en esta misma línea, se realizaron otra serie de estudios (Conejo, 2015; Conejo, Arce y Ortega, 2015) sobre la presencia de la demostración matemática en los libros de texto de Bachillerato (o equivalentes) en los temas de límites, continuidad y derivabilidad de una función. Uno de ellos fue objeto de publicación en el volumen 87 de *Números* (Conejo y Ortega, 2014). El objetivo de estos estudios fue analizar la evolución en la presencia y tratamiento de la demostración en los manuales desde la Ley General de Educación de 1970 hasta la Ley Orgánica de Educación promulgada en 2006. Estos estudios partieron del marco usado en el trabajo anterior de Ibañes y Ortega (2004), pero añadiendo un mayor detalle en el análisis de la clase de justificación utilizada por el LT en los teoremas que presenta. Para ello, se partió del concepto de *esquema de prueba*, introducido por Harel y Sowder (1998) y enriquecido por Ibañes y Ortega (2001), adaptándose al contexto de LT del siguiente modo:

Consiste en lo que el libro de texto muestra que podría constituir persuasión y convencimiento para un posible lector, en este caso, un estudiante de matemáticas del nivel para el que está diseñado el libro, entendiendo como convencimiento el proceso impreso en el LT que podría eliminar las dudas del posible lector sobre la veracidad de una afirmación y como persuasión, el proceso del libro con el cual el posible lector podría eliminar las dudas de otros sobre la veracidad de una afirmación. (Conejo, 2015, p. 47).

Estos autores seleccionaron aquellas categorías de esquemas de prueba que eran susceptibles de ser localizadas en libros de texto, añadiendo una categoría nueva, las pruebas preformales (van Asch, 1993). Éstas representan líneas de razonamiento que contienen la idea principal de una demostración pero sobre algún objeto matemático concreto (en lugar de genérico). Esto disminuye el nivel de abstracción, pero muestra una línea de razonamiento fácilmente generalizable a un objeto genérico.

Los resultados del análisis presentado por Conejo y Ortega (2014) muestran que, con el paso de las diferentes leyes educativas, ha disminuido paulatinamente la presencia de demostraciones rigurosas en los LT de Bachillerato: los esquemas de prueba axiomáticos y transformacionales se presentan, a veces, incompletos (omitiéndose algunos pasos), o son sustituidos por otros esquemas de prueba, como los de tipo inductivo. No se recurre a esquemas con una menor abstracción pero que sí mantengan las líneas de razonamiento, como las pruebas preformales. Además, se evidenció el uso cada vez mayor de esquemas de prueba inductivos basados en ejemplos con gráficas de funciones,

pareciendo que se busca el convencimiento más a través de la intuición que del razonamiento matemático. A esto se une la falta de indicaciones en los textos asociadas al reconocimiento y distinción de los procesos justificativos. La conjunción de todo ello hace que los libros cada vez ofrezcan menos oportunidades de aprendizaje ligadas al reconocimiento, distinción y uso de los procesos demostrativos en el desarrollo de los temas, y puedan contribuir a reforzar algunas dificultades cognitivas habituales como es el enraizamiento en los alumnos de la idea de que un ejemplo concreto se considere como una auténtica demostración matemática que les convence y persuade de la validez de un resultado (Ibañez y Ortega, 2001). Además, en Conejo y Ortega (2014) se destaca la aparente contradicción que supone esta desaparición paulatina de las demostraciones formales en los LT analizados con el hecho de que leyes educativas como LOGSE o LOE mencionen de forma explícita en sus desarrollos curriculares la necesidad e importancia de la demostración matemática y de su papel, en contraposición con la LGE anterior.

3. Revisitando y completando los resultados obtenidos a la luz de la nueva ley LOMCE

Hemos querido completar la relectura de estos artículos con un apunte sobre la evolución de la demostración y los libros de texto con la nueva ley educativa LOMCE. El desarrollo curricular de esta ley refleja de forma clara la importancia de la demostración, al incluirse referencias explícitas a la misma en el Bloque 1, titulado “Procesos, métodos y actitudes en matemáticas”; en particular, en la modalidad de Ciencias del Bachillerato, se han incluido diferentes métodos de demostración como la reducción al absurdo, el método de inducción, los contraejemplos o los razonamientos encadenados. Sin embargo, no se observa este reflejo en el tratamiento de los contenidos en los LT, pues al menos en una de las editoriales analizadas en Conejo y Ortega (2014) se mantiene el comportamiento en LOE de la editorial para los teoremas de continuidad. Esta editorial incluye en LOMCE un apartado sobre la demostración como contenido en los LT de 1º y 2º de Bachillerato, pero no se proporcionan apenas oportunidades de aprendizaje de los procesos demostrativos en el propio desarrollo de los diferentes temas y resultados.

Los aspectos ligados a la demostración en la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas constituyen una línea de investigación muy relevante en Didáctica de la Matemática, en la que existen muchas cuestiones abiertas y emergentes, como es su presencia en los libros de texto (Mariotti et al., 2018). Los resultados de los estudios sobre la demostración constituyen una base para tomar decisiones fundamentadas en un aula sobre qué justificaciones y demostraciones hacer y la intencionalidad didáctica de su presentación para conseguir un mejor reconocimiento, distinción y uso de procesos matemáticos fundamentales. Así, abogamos por una instrucción en la que los procesos demostrativos tengan relevancia en las aulas, ya desde las primeras edades. En este sentido, resulta muy esperanzadora la experiencia descrita por Sánchez y Gil (2014), en la que observaron cómo los alumnos de 3º de ESO que habían recibido una instrucción donde la demostración tenía un papel preponderante obtenían mejores resultados al finalizar la experiencia que aquellos que no la habían recibido, a pesar de que los resultados de partida eran muy similares.

Bibliografía

- Conejo, L. (2015). *Análisis histórico de las demostraciones en libros de texto sobre los teoremas de límites y continuidad. De la Ley General de Educación a la Ley Orgánica de Educación*. Tesis doctoral no publicada. Universidad de Valladolid.
- Conejo, L. y Ortega, T. (2014). Las demostraciones de los teoremas de continuidad en los libros de texto para alumnos de 17-18 años correspondientes a las tres últimas leyes educativas españolas. *Números*, 87, 5-23.



- Conejo, L., Arce, M. y Ortega, T. (2015). Análisis de las justificaciones de los teoremas de derivabilidad en los libros de texto desde la Ley General de Educación. *Avances en Investigación en Educación Matemática*, 8, 51-71.
- deVilliers, M. (1993). El papel y la función de la demostración en matemáticas. *Épsilon*, 26, 15-30.
- Hanna, G. (1995). Challenges to the Importance of Proof. *For the Learning of Mathematics*, 15(3), 42-49.
- Hanna, G. y Barbeau, E. (2010). Proofs as bearers of Mathematical Knowledge. En G. Hanna, H. N. Jahnke y H. Pulte (Eds.), *Explanation and Proof in Mathematics: Philosophical and Educational perspectives* (pp. 85-100). New York, NY: Springer.
- Hanna, G. y de Villiers, M. (Eds.). (2012). *Proof and proving in mathematics education. The 19th ICMI study*. New York, NY: Springer.
- Harel, G. y Sowder, L. (1998). Students' proof schemes: Results from exploratory studies. *Issues in Mathematics Education*, 7, 234-283.
- Ibañes, M. y Ortega, T. (1997). La demostración en matemáticas. Clasificación y ejemplos en el marco de la educación secundaria. *Educación Matemática*, 9(2), 65-104.
- Ibañes, M. y Ortega, T. (2001). Un estudio sobre los esquemas de prueba en alumnos de primer curso de bachillerato. *UNO*, 28, 39-60.
- Ibañes, M. y Ortega, T. (2004). Un análisis del tratamiento de la demostración matemática en los libros de texto de Bachillerato. *Números*, 57, 19-32.
- Ibañes, M. y Ortega, T. (2005). Dimensiones de la demostración matemática en Bachillerato. *Números*, 61, 19-40.
- Mariotti, M. A., Durand-Guerrier, V. y Stylianides, G. J. (2018). Argumentation and proof. En T. Dreyfus, M. Artigue, D. Potari, S. Prediger y K. Ruthven (Eds.), *Developing Research in Mathematics Education: Twenty Years of Communication, Cooperation and Collaboration in Europe* (pp. 75-89). Londres, Reino Unido: Routledge.
- Ortega, T. (1996). Modelo de valoración de textos matemáticos. *Números*, 28, 4-12.
- Sánchez, E. y Gil, J. A. (2014). Las demostraciones en la didáctica de las Matemáticas. Una experiencia con alumnos de 3º ESO. *Números*, 86, 79-94.
- Stylianides, A. J. y Harel, G. (Eds.). (2018). *Advances in Mathematics Education Research on Proof and Proving: An International Perspective*. Cham, Suiza: Springer.
- Schubring, G. (1987). On the Methodology of Analysing Historical Textbooks: Lacroix as textbook author. *For the Learning of Mathematics*, 7(3), 41-51.
- van Asch, A. G., (1993). To prove, why and how? *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 24(2), 301-313.

Laura Conejo Garrote. Profesora ayudante doctora de la Facultad de Educación de Soria, Universidad de Valladolid. Sus líneas de investigación giran en torno a la demostración, la didáctica del análisis matemático y los libros de texto. Email: laura.conejo@uva.es

Matías Arce Sánchez. Profesor ayudante doctor de la Facultad de Educación de Segovia, Universidad de Valladolid. Líneas de investigación: Instrumentos usuales de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas (cuaderno del alumno, libro de texto), didáctica del análisis matemático. E-mail: matias.arce@uva.es

Tomás Ortega del Rincón. Catedrático de Universidad de la Facultad de Educación y Trabajo Social, Universidad de Valladolid. En su amplia trayectoria ha investigado sobre diferentes líneas de investigación, como son la didáctica del análisis matemático o la demostración matemática. Autor de más de 150 trabajos entre artículos, libros, capítulos de libro y contribuciones a congresos. Email: tomas.ortega@uva.es