

POSIBILIDADES DIDACTICAS DE UN ROMPECABEZAS
 GEOMETRICO LLAMADO " TRAPEZOCUADRO "

Juan Antonio Caballero Molina
 Jesús González Contreras
 Angel Martínez Páez
 (Grupo LIMITE - Córdoba)

INTRODUCCION

En línea con la idea de Vicente Meavilla Seguí, accésit del Premio 1980 sobre Didáctica de la Matemática, convocado por la Sociedad Canaria de Profesores de Matemáticas "Isaac Newton", exponemos a continuación un sencillo trabajo sobre las posibilidades que, en orden al estudio de los cuadriláteros, tiene el puzzle que representa la fig.1.

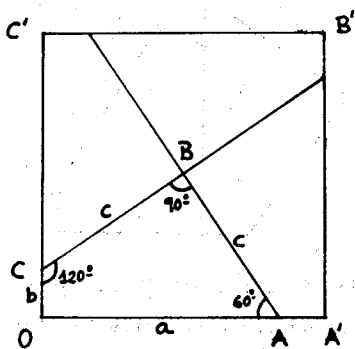


fig.1

Su construcción es como sigue :

Dividimos el cuadrado $OA'B'C'$, de lado 2ℓ , en cuatro cuadriláteros iguales, de forma que

$$\overline{OA} + \overline{OC} = 2\ell, \text{ es decir, } a + b = 2\ell$$

El ángulo B es recto y, evidentemente, $\overline{BC} = \overline{AB}$

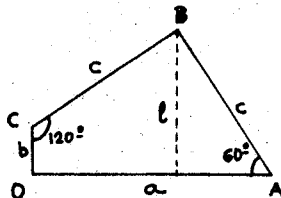
Si tomamos $\hat{A} = 60^\circ$, resulta

$$c = \frac{2\sqrt{3} \cdot \ell}{3}$$

Por otra parte,

$$a = \ell + \frac{\ell}{\sqrt{3}} = \frac{(\sqrt{3} + 1) \cdot \ell}{\sqrt{3}}$$

$$b = 2\ell - \frac{(\sqrt{3} + 1) \cdot \ell}{\sqrt{3}} = \frac{(\sqrt{3} - 1) \cdot \ell}{\sqrt{3}}$$



Sin pérdida de generalidad podemos considerar $\ell = \sqrt{3}$, con lo cual la medida de los lados de una pieza de nuestro rompecabezas es

$$a = \sqrt{3} + 1, \quad b = \sqrt{3} - 1 \quad \text{y} \quad c = 2$$

El problema, y a la vez entretenimiento, va a ser ensamblar piezas para formar cuadriláteros, haciendo coincidir total o parcialmente un lado de cada pieza (fig.3).

Es cierto que en este caso no se forma un cuadrilátero, pero es una forma de unirlos.

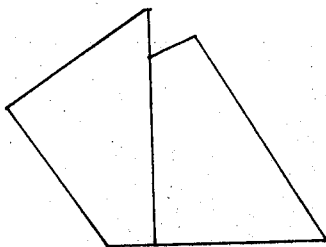


fig.3.

Las longitudes de los lados de cualquier figura, en este caso - cuadrilátero, susceptible de ser construida con las piezas, vendrá dada - por

$$L = 2(K_1 + K_2) + K_3 - K_4 + (K_3 + K_4)\sqrt{3} \quad ; \quad K_i \in \mathbb{N}, \quad 0 \leq K_i \leq 4$$

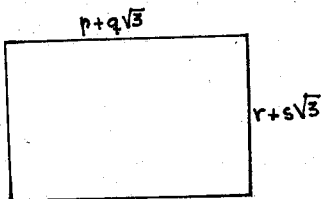
que puede ser puesta en la forma

$$L = p + q\sqrt{3} \quad \text{con } p \in \mathbb{Z} \text{ y } q \in \mathbb{N} \text{ y cumpliéndose que } p + q = 2$$

A partir de esta condición, que señalaremos en adelante por *, veamos los cuadriláteros que podemos formar.

RECTANGULOS

Las dimensiones genéricas son las indicadas en la figura.



Para que pueda ser construido con piezas de nuestro puzzle, su área debe ser múltiplo del área de una pieza.

$$\text{Área de una pieza} = \frac{\text{Área del cuadrado}}{4} = \frac{(2\ell)^2}{4} = \ell^2 = 3$$

Designando por n el número de piezas que necesitamos, resulta

$$A_{\text{rect.}} = (p + q\sqrt{3})(r + s\sqrt{3}) = 3n, \text{ de donde}$$

$$pr + 3qs = 3n \quad \text{y} \quad ps + qr = 0$$

Puesto que p y q no pueden ser simultáneamente 0, y tampoco r y s , caben dos posibilidades :

$$1^{\text{a}}) \quad p = 0 = r \qquad 2^{\text{a}}) \quad q = 0 = s$$

Veamos la primera:

$$p = 0 = r \implies qs = n$$

Para $n = 1$ es imposible ; el resultado sería cualquiera de las cuatro piezas.

Para $n = 2$, es $qs = 2$, de donde

$$q = 1 \text{ y } s = 2 \text{ o bien, } q = 2 \text{ y } s = 1$$

En ambos casos, resulta $p + q \neq 2$ o $r + s \neq 2$ y, por tanto, se descarta.

Para $n = 3$, resulta $qs = 3$, y las sumas de p, q y r, s tampoco son múltiplos de 2.

Por último, tomando $n = 4$, obtenemos $q = 2$, $s = 2$, que satisfacen *.

La única opción válida es, por tanto, el cuadrado inicial.

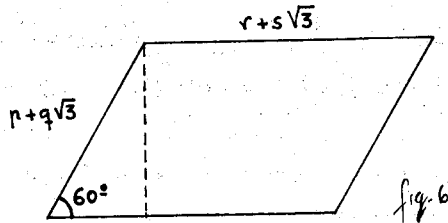
$$2^2) \quad q = 0 = s \implies pr = 3n$$

Dando a n los valores 1, 2 ó 3, no se cumple la condición.

Para $n = 4$, es $pr = 12$. De todas las situaciones posibles, la única que satisface * es $p = 6$, $r = 2$ (análogamente, la recíproca), que hay que rechazar, ya que, si $r = 2$, en los dos vértices que delimitan este lado tendríamos dos ángulos rectos, circunstancia que no se presenta en ninguno de los lados de longitud 2 (véase la fig.1).

PARALELOGRAMOS ROMBOIDALES

La situación sería como la descrita en la figura adjunta. Los ángulos posibles no pueden ser otros que 60° y 120° .



Igualando áreas:

$$(r + s\sqrt{3})(p + q\sqrt{3}) \frac{\sqrt{3}}{2} = 3n, \text{ o sea,}$$

$$pr + 3qs = 0 \quad \text{y} \quad ps + rq = 2n$$

Primera posibilidad :

$$p = 0 = s \implies rq = 2n$$

Para $n = 1$, es imposible

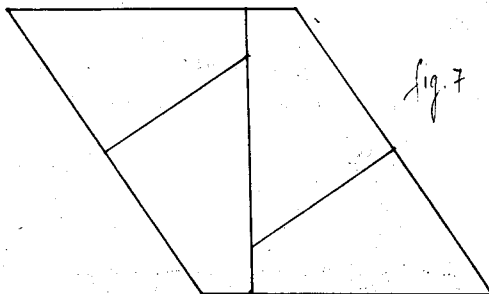
Para $n = 2$, es $rq = 4$, que da lugar a estas opciones:

$$r = 1, q = 4 ; r = 4, q = 1 ; r = 2, q = 2$$

Los dos primeros pares no cumplen *. En cuanto al tercero, - los ángulos en los vértices de un lado de longitud 2 no miden 60° y 120° .

Para $n = 3$, es $rq = 6$. Ninguno de los pares $((1,6), (6,1), (2,3), (3,2))$ verifica la condición.

Finalmente, $n = 4$ da como solución válida $r = 4$ y $q = 2$, representada en la figura que sigue.

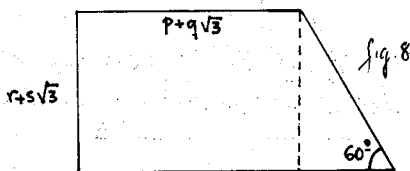


Segunda posibilidad :

Siendo $r = 0 = q$, obtenemos un resultado análogo al anterior - para los valores $p = 4$ y $s = 2$.

TRAPECIOS

A) TRAPECIOS RECTÁNGULOS



La situación posible es la indicada en la figura. Igualando - áreas:

$$\frac{(2p + 2\sqrt{3}q + s + \frac{\sqrt{3}}{3}r)}{2} : (r + s\sqrt{3}) = 3n$$

obtenemos

$$3s^2 + r^2 + 6ps + 6qr = 0$$

$$pr + 3qs + rs = 3n$$

La primera ecuación conduce a

$$ps + qr = -\frac{3s^2 + r^2}{6}, \text{ es decir, } 3s^2 + r^2 = 6$$

resultando, como única solución

$$\left. \begin{array}{l} s = 2 \\ r = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow p = -1 \Rightarrow 2q = -n \Rightarrow q = n/2, \text{ que da, para valores de}$$

$n, 4$ y 2 . Entonces,

Si es $n = 4$, es $q = 2$, y resulta $p + q \neq 2$

Para $n = 2$, es $q = 1$, solución válida:

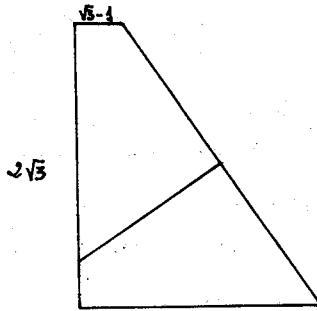


Fig. 9

B) TRAPECIO ISOSCELES

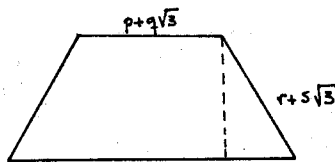


Fig. 10.

Igualando áreas deducimos que

$$(2p + r)r + 3s(2q + s) = 0 \quad (1)$$

$$(2q + s)r + s(2p + r) = 4n \quad (2)$$

lo cual conduce a que

$$(2p + r)r = 3$$

Como para cualquier $\bar{3}$ no nulo resultan situaciones imposibles

sólo nos queda considerar $(2p + r)r = 0$. Entonces, de (1) se deduce - que $s = 0$. En estas condiciones, puede ser:

1^o) $r = 0$, en cuyo caso, por (2), se deduce que $n = 0$, lo cual - es imposible.

2^o) $r = -2p$, que nos lleva, por (2), a que $-pq = n$. Veamos:

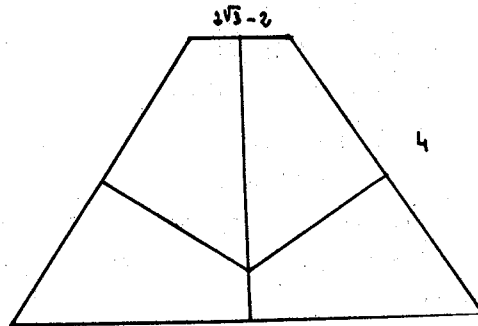
Si tomamos $n = 1$ ó $n = 2$, no hay solución

Si hacemos $n = 3$, resulta $pq = -3$ y, entonces:

Para el par $(-3, 1)$ no hay solución, ya que resultaría $(p+q\sqrt{3})$ negativo.

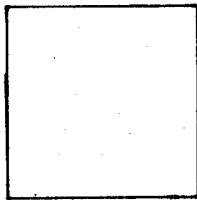
También es imposible para $(1, -3)$, puesto que $q \geq 0$

Y nos queda sólo tomar $n = 4$. Por tener que ser $q \in \mathbb{N}$, descartamos $p = 2$, $q = -2$. La otra posibilidad, $p = -2$, $q = 2$, da la solu - ción, tal como muestra la figura:

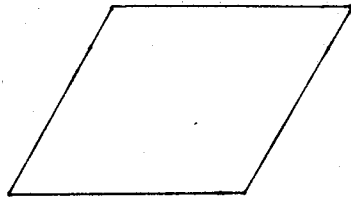


Señalemos, por último, que un cuadrilátero sin lados paralelos - puede obtenerse con una pieza cualquiera de nuestro rompecabezas.

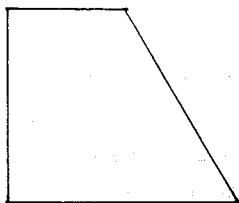
En resumen, podemos componer los siguientes cuadriláteros :



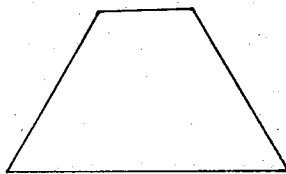
CUADRADO



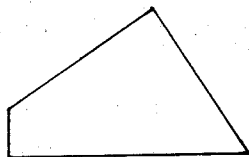
PARALELOGRAMO ROMBOIDAL



TRAPEZIO RECTANGULO



TRAPEZIO ISOSCELES



CUADRILATERO
TRAPEZOIDAL

En cuanto al aspecto didáctico, este estudio confirma las con-
clusiones que señala el profesor Meavilla Seguí:

- . Observar y manejar cuadriláteros
- . Obtener áreas de polígonos
- . Comparar polígonos equivalentes
- . Resolver por tanteo ecuaciones y sistemas de ecuaciones en Z
- . Operar con números irracionales.

BIBLIOGRAFIA

VICENTE MEAVILLA SEGUI - Posibilidades didácticas de un rombo
cañezas geométrico llamado 12-hexágono - NUMEROS, 2 - SOCIEDAD CANARIA DE
PROFESORES DE MATEMÁTICAS. "ISAAC NEWTON".