PREPARACION A LA RESOLUCION DE ECUACIONES LINEALES EN EGB

Alberto Aizpún

JUSTIFICACION PSICOPEDAGOGICA

Es un hecho que las tesis de PIAGET y su escuela sobre la formación y desarrollo de las estructuras mentales y de los conceptos matemáticos en el niño, son aceptadas y seguidas por la mayor parte de los didactas de la Matemática. Con frecuencia, un argumento que se cita a favor de la idoneidad de algún procedimiento particular, es que está de acuerdo con las tesis de PIAGET.

Pero, hay un punto en estas que no fue aceptado tan unánimemente como otros, ya desde que se enunció : la respuesta a la cuestión de la supremacía entre la estructura mental alcanzada y el aprendizaje. Es sabido que el propio PIAGET sostuvo que esa primacía corresponde a la estructura, aunque posteriormente esa tesis ha venido siendo matizada y modificada un tanto por los continuadores de su obra. No es menos conocida la tesis, opuesta, de BRUNNER : un aprendizaje bien dirigido influye en la rapidez de aparición de las estructuras mentales, de modo que cada una de estas surge en el niño antes de lo que lo haría espontáneamente sin auxilio del aprendizaje. Si bien queda por precisar lo que se pueda entender por un aprendizaje *bien dirigido*, algo se aclara cuando afirma que antes de atacar un concepto a la edad en que su utilización pueda automatizarse, es necesario *prepararlo* en cursos anteriores mediante *actividades de aproximación*.

La actividad que se presenta a continuación es un intento deaveriguar lo que se puede entender por "bien dirigido","actividades de aproximación" y "preparación de un concepto". Por tanto, es un punto de partida, un "camino hacia" la resolución de algunas ecuaciones lineales. Nacida de una comunicación presentada al *I Congreso Internacional de Enseñanza de la Matemática (Lyon, 1969)* sobre el tratamiento de las ecuaciones en la EGB, ha sido ensayada, corregida y perfilada durante años, según la experiencia ha ido aconsejando, hasta quedar como se presenta aquí.

INTRODUCCION DEL JUEGO

LOS PERSONAJES

Las reglas del juego pueden introducirse evocando el modo como se organiza una sesión de teatro leído o unos comentarios sobre cualquier tema con la técnica de la "mesa redonda". En ambos casos, el público asistente ve junto a cada lector una tarjeta con el nombre del personaje que representa o el de la persona que opina. En nuestro juego, cada alumno que intervenga será un personaje, reconocible porque ante él habrá una tarjeta que podrá ser de uno de los tipos que aparecen en la figura 1 (a,b,c,d : números naturales).

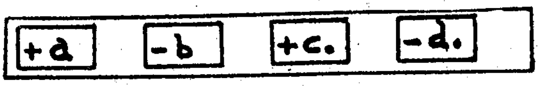


Fig. 1

Así que se puede hablar de "el personaje más uno" ,"el personaje menos dos","el personaje más dos punto","el personaje menos tres punto",.....tantos como se desee.

LAS FICHAS

Así como cada lector actúa con el texto literario que tiene ante si, recitando lo que este dice, y cada persona interviene en la mesa redonda expresando sus opiniones sobre los temas discutidos, cada personaje de este juego interviene actuando sobre unas fichas materiales. Tales fichas son de plástico, madera o cartón ; la forma cuadrada, de 3 cm de lado resulta cómoda de manejar si tienen espesor suficiente.

Habrá tantas como se quiera y se pueden clasificar en dos clases : unas, que tienen la señal X ; otras, que carecen de señal. Dentro de cada clase, unas son de color blanco y otras son amarillas, por ejemplo. Si la señal X se efectúa haciendo un surco en la ficha, no hace falta darle otro color; si se hace pegando un papel, será siempre del mismo color, distinto a los de las fichas, por ejemplo negro. A los efectos de esta exposición escrita, las fichas se representarán como se ve en la figura 2.

⊠	⊠	□	■
blanca con X	amarilla con X	blanca sin X	amar. sin X

FIG. 2

ACTUACIÓN DE CADA PERSONAJE

Cada personaje contribuye a un fondo de fichas con un número de éstas que depende del nombre consignado en la tarjeta.

Los de nombre "*más a*" contribuyen al fondo aportando *a* fichas blancas (sin X); los personajes de nombre "*menos b*" aportan *b* fichas amarillas (sin X). A los personajes cuya tarjeta tiene punto se les asigna un paquete de fichas antes de empezar el juego. Entonces, los de nombre "*más a punto*" multiplican por *a* el número de fichas de cada tipo que se le ha asignado y este producto es su contribución. Por ejemplo, si al personaje "*más dos punto*" se le han asignado dos blancas con X y tres amarillas sin X, las convierte en cuatro blancas con X y seis amarillas sin X. Los personajes de nombre "*menos b punto*" multiplican por *b* el número de fichas de cada tipo que se le hayan asignado y luego cambian el color de cada una (o inversamente). Por ejemplo, si al personaje "*menos tres punto*" se le han asignado dos fichas blancas con X y tres amarillas sin X, aportará al fondo seis amarillas con X y nueve blancas sin X.

ORGANIZACION DE LA ACTIVIDAD

A un lado de la mesa se sitúan varios personajes, que actuarán como un equipo; al otro lado de la mesa, otros personajes actuarán como otro equipo. Puede existir un director o moderador, que se encarga de asignar fichas a cada personaje con punto y de controlar la actividad; sin embargo, esta función exterior inmediatamente se hace innecesaria y es asumida por los propios actuantes directos. Sea, por ejemplo, la situación de la fig. 3.

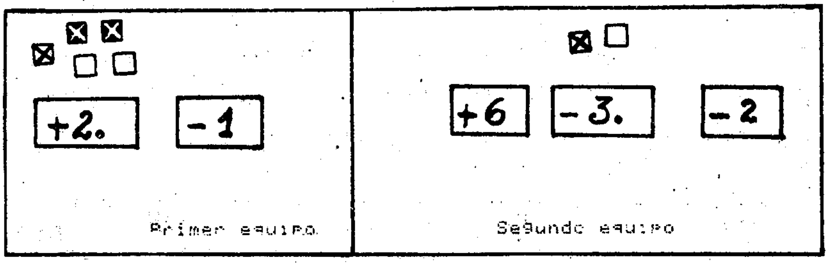


FiG. 3

Este esquema significa que se han formado dos equipos : el primero está formado por los personajes *"más dos punto"* y *"menos uno"* ;en el segundo intervienen *"más seis"* , *"menos tres punto"* y *"menos dos"*. El moderador,o los propios jugadores,han asignado al personaje *"más dos punto"* una ficha blanca con X ,dos amarillas con X y dos blancas sin X. Al personaje *"menos tres punto"* se le ha asignado una blanca con X y una blanca sin X. Esas fichas permanecen en poder de los jugadores,para poder reproducir,rectificar o controlar el desarrollo de la actividad. Esta transcurre de la siguiente manera :

El personaje *"más dos punto"* aporta al fondo de su equipo dos fichas blancas con X , cuatro amarillas con X y cuatro blancas sin X.El jugador *"menos uno"*,añade,por su parte,una amarilla sin X.

En cuanto al segundo equipo,*"más seis"* aporta seis fichas blancas sin X ; *"menos tres punto"* aporta tres amarillas con X y tres amarillas sin X y,finalmente,el jugador *"menos dos"* añade dos amarillas sin X.

Así que,después de todo ello,que se realiza con gran rapidez, las fichas que hay en juego son las de la figura 4.

(En adelante escribiremos "blanca" para decir "blanca sin X", y "amarilla" para referirnos a la "amarilla sin X").

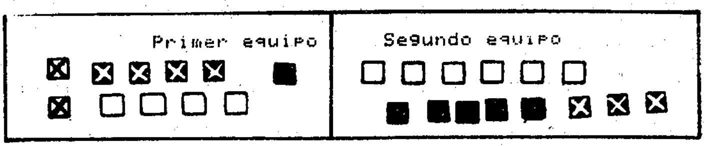


FIG. 4

EL PROBLEMA Y SU RESOLUCION

El problema que ahora se plantea es el siguiente :

¿A cuántas fichas sin X y de qué tipo ha de equivaler cada blanca con X para que se registre empate?

Con un examen breve, se llega pronto a destacar los dos hechos siguientes :

1º) Si ambos equipos están empatados y al montón de fichas de cada uno de ellos se le añade una blanca o una amarilla o una blanca con X o una amarilla sin X, el empate subsiste.

2º) También subsiste el empate si a ambos equipos se les retira el mismo número de fichas idénticas.

Como se ve, la rapidez de acceso a la comprensión y enunciado de estos dos hechos es independiente del volumen de conocimientos matemáticos que tenga el alumno; en cambio, sí depende del hábito de observación y expresión de ideas personales que se cultive en la clase.

Por aplicación de la segunda de esas observaciones, los equipos quedan como indica la fig.5.

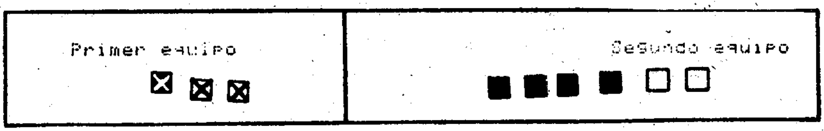


Fig. 5

En este momento se comprende que el problema no puede resolverse hasta que no se estipule el valor comparativo de fichas blancas y fichas amarillas de la misma clase. Por eso es necesario establecer, con la misma arbitrariedad con que se hace en los juegos, una regla que solvente esa cuestión. De las infinitas posibles, la elegida para este tipo de juego es esta :

"Dos fichas de distinto color pero de la misma clase, es decir, ambas con X o ambas sin X, en manos del mismo equipo, se pueden retirar".

Aplicando esta regla que, en realidad, es la única establecida como tal, en el primer equipo se retiran dos fichas con X (una de cada color), mientras que en el segundo se retiran dos pares blanca-amarilla. Así, queda finalmente la situación de la fig.6 y el problema está resuelto,pues si hay empate,cada blanca con X equivale a dos amarillas.

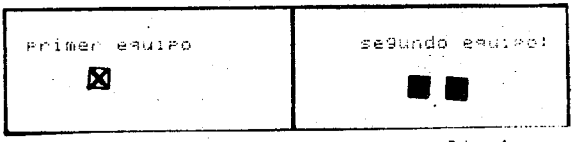


Fig. 6

El dominio de las reglas de juego resulta imprescindible,pero es fácil de conseguir y se hace con más rapidez de lo que parece indicar su exposición escrita. Para adquirir ese dominio se reiteran las situaciones a resolver,pero de tal modo que no sean simples calcos de la primera,sino que ofrezcan todo tipo de soluciones. En la expuesta anteriormente,la solución se expresaba en fichas amarillas; las nuevas a plantear deberán tener solución en fichas blancas,unas ; tendrán como solución cero,otras ; o bien,podrá ser solución cualquier número de fichas amarillas o blancas. Finalmente,carecerá de solución y,precisamente,el decir y razonar que no hay solución es la solución del problema.

Como confirmación del modo de actuar y aclaración de lo que se viene diciendo,véase la situación de la fig. 7.

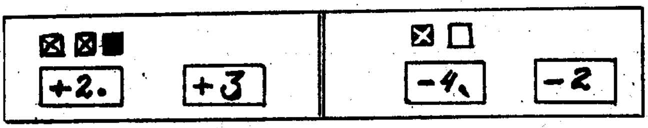


Fig. 7

Después de actuar los distintos personajes,la situación es esta otra :

Primer equipo: ⊠ ⊠ ⊠ ⊠ ■ ■ □ □ □

Segundo equipo: ⊠ ⊠ ⊠ ⊠ ■ ■ ■ ■ ■ ■

Y,después de quitar lo mismo a ambos equipos,se transforma en la siguiente :

Primer equipo: □ □ □

Segundo equipo: ■ ■ ■ ■

El empate es imposible para ninguna equivalencia de las fichas blancas con X.

La figura siguiente (8) presenta otra situación,de un tipo que no debe dejar de proponerse. Después de que cada jugador haga su papel, las fichas que habrá aportado cada equipo son las representadas en la fi gura 9.

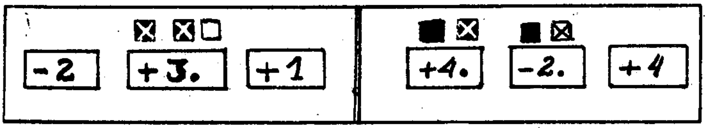


FIG. 8

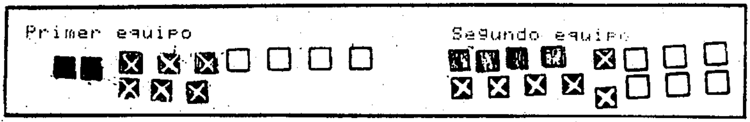
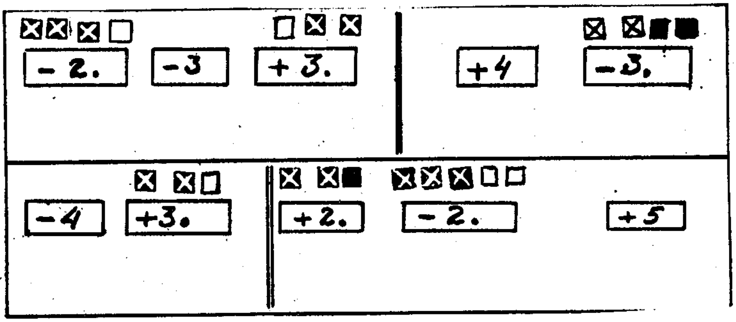


FIG.9

Quitando a ambos equipos lo mismo y aplicando después la regla a lo que le queda al segundo, resulta que ambos se han quedado sin fichas y, por tanto, empatados. Para conseguir ese empate no ha intervenido en nada el posible valor de las fichas blancas con X, de modo que, cualquiera que se les quiera atribuir, sirve para el caso.

Las figuras 10 y 11 presentan otras dos situaciones. Puede comprobarse que en la primera se produce el empate dando a cada blanca con X el valor de dos blancas ; en la segunda, se produce si la blanca con X carece de valor.



FIGS. 10 y 11

SIMBOLIZACION DE LAS ACCIONES

Una vez alcanzados la comprensión del problema y el dominio de su resolución manual, es necesario pasar a comunicar por escrito, mediante el simbolismo del Algebra, la situación propuesta, el problema planteado, las fases de su resolución y la solución hallada. Para describir este proceso volvamos a la figura 3.

El primer personaje (el "*más dos punto*") se encuentra con el problema de simbolizar el paquete de fichas que le ha sido asignado. Una manera de hacerlo sería dibujarlas,pero resulta engorroso; en cambio,es fácil simbolizar las fichas que tienen la señal X dibujando ésta y escribiendo cuántas hay. Así, 4X , 5X , X , 7X,significan,respectivamente,cuatro,cinco,una o siete fichas con X. Queda por expresar si son blancas o amarillas. ¿En qué se distinguen los personajes que añaden fichas blancas de los que añaden amarillas? Con la misma técnica,se escribirá el signo + para representar fichas blancas y el signo - para representar amarillas. De modo que,hablando de fichas,la escritura -2X significa dos amarillas con X ; la +2X significa dos blancas con X ; la +2 quiere decir dos blancas y la -2,dos amarillas.

Acordado lo anterior,el paquete asignado al primer personaje se puede escribir -2X+X+2 y lo pondremos en la forma (-2X+X+2) para expresar que se trata del paquete de fichas de un solo jugador. Queda por consignar que ese paquete se le ha dado,precisamente,al jugador *"más dos punto"* y no a otro. Para ello,ese personaje escribe su nombre ante el paquete,y queda +2.(-2X+X+2).

A continuación,el jugador *"más uno"* firma como confirmación de que ha cumplido su papel. De ese modo,el primer equipo habrá escrito

$$+2.(-2X+X+2)-1$$

y el segundo equipo escribirá

$$+6-3.(+X+1)-2$$

La imposición hecha del empate entre los dos equipos se expresa por la escritura

$$+2.(-2X+X+2)-1 = +6-3.(+X+1)-2$$

Al comienzo de la simbolización,cada alumno actuante escribirá sólamente la parte que le corresponda según el personaje que interprete. Cuando ya no tenga duda de lo que debe escribir,según sea el personaje que interprete,cada alumno escribirá toda la ecuación y,desde ese momento,la actividad se convierte en individual. La participación efectiva en equipo habrá terminado.

Siguiendo con el simbolismo,después de escribir la ecuación hay que hacerlo con las distintas fases que se han visto en su resolución. La primera ha sido la expresada por la fig.4,que se podrá poner

$$+2X-4X+4-1 = +6-5-3X$$

y el orden de escritura de los términos depende de las observaciones que cada uno haga.

Como el proceso, ya explicado, ha continuado retirando a cada equipo tres fichas amarillas con X, cuatro blancas y una amarilla, lo que queda (fig.5), se escribe

$$-X+2X = -4+2$$

y, por aplicación de la regla, resulta

$$+X = -2$$

Veamos el simbolismo con que se puede expresar la situación y el proceso de resolución relativo a la fig.7 :

La situación se simboliza por la escritura

$$+2.(+2X-1)+3 = -4.(-X+1)-2$$

Cada jugador hace la aportación que indica su nombre. En el primer equipo, el llamado *"más dos punto"* dobla el número de fichas de cada tipo que tiene asignadas, mientras que el *"más tres"* añade tres blancas. En el segundo equipo, el personaje *"menos cuatro punto"* multiplica por cuatro y cambia el color de las fichas que se le han dado; el *"menos dos"*, añade dos amarillas. Con todo eso y la hipótesis del empate, se escribe

$$+4X-2+3 = +4X-4-2$$

Si se comienza por quitar a cada equipo cuatro blancas con X y dos amarillas, el primer equipo queda con tres blancas y el segundo con cuatro amarillas. Como eso no es un empate, resulta que el problema propuesto carece de solución.

De modo parecido se actúa en cualquier otro caso. Por ejemplo, las situaciones propuestas en las figs. 8, 10 y 11 se simbolizan, respectivamente, por

$$-2+3.(-2X+1)+1 = +4.(-1-X)-2.(-1+X)+4$$

$$-2.(-3X+1)-3+3.(+1-2X) = +4-3.(+2X-2)$$

$$-4+3.(-2X+1) = +2.(-2X-1)-2.(-3X+2)+5$$

CONTROL DEL APRENDIZAJE Y SIMBOLIZACION DEL PROCESO

La escritura alcanzada emplea símbolos semejantes para ideas diferentes. En primer lugar, se observa que es imprescindible escribir un signo ante cada coeficiente, como es imprescindible considerar un signo para cada número entero. Cuando la escritura se refiere a fichas, el signo indica su color; cuando se refiere a jugadores sin punto, indica, igualmente, el color de las fichas que ha de añadir; cuando se refiere a jugadores con punto, el signo "menos" indica que se cambia el color de las fichas asignadas, y el signo "más" que se mantiene el color. Una escritura como 3X es incompleta, ya que puede entenderse que significa "tres fichas señaladas con X", pero no dice el color de las mismas y, por tanto, no suministra suficiente información.

No hay que perder de vista que la actividad que describimos no tiene como objetivo la explicación de una pseudoteoría sobre la resolución de ecuaciones, sino que es un ejemplo de *preparación del concepto* (en una aproximación al sentido de *BRUNNER*) a fin de que éste sea comprendido cuando se introduzca más adelante.

Por otro lado, queremos hacer notar que tan importante como el fondo sobre el que la actividad se plantea (la resolución de algunas ecuaciones) es la actividad misma, que en esta etapa de su desarrollo obliga a emplear y distinguir símbolos parecidos pero que tienen distinto significado, como tantas veces ocurre en la Matemática y en la Técnica. Así, por ejemplo, no es lo mismo +2.(+X) que +2X ó +2.(X) : el primero expresa que al personaje *"más dos punto"* se le ha asignado una ficha blanca con X ; el segundo simboliza dos fichas blancas con X y expresa el resultado de la acción del personaje ; el tercero está mal empleado.

De todos modos, un control de la comprensión del simbolismo y una exploración de hasta dónde sería posible llegar en la reducción de la escritura, puede hacerse invirtiendo el orden explicado, es decir, presentando escrituras como -4.(-2X+1)-3+2.(-1+4-3X) = +4-2.(+X-3X+3)+5 y haciendo la propuesta de que "se ponga en escena", esto es, que se reconozca la situación : cuáles son los personajes, qué fichas han sido asignadas,etc.

En cuanto a la automatización del proceso,nuestra intención está muy lejos de sustituir la descripción en lenguaje de fichas por la aplicación de la propiedad distributiva. La actividad se desarrolla en un curso en que el alumno desconoce el número entero como tal y,por tanto,desconoce también las reglas de cálculo en el conjunto,Z,de los enteros. Por ello,más que de automatización,se puede hablar de formalización en el sentido de que no se usarán las fichas,sino la escritura con que se simbolizan las acciones realizadas con ellas. Casi siempre,el proceso seguido para llegar ahí comienza por una asociación o traducción del símbolo; la escritura *-4.* evoca la acción a realizar y,una vez calculados el número y clase de las fichas que debe aportar el personaje,se expresa por escrito. Es así como de una escritura tal como -4.(+2X-1) se pasa a la -8X+4. Se piensa que el personaje *"menos cuatro punto"* cambia el color,además de multiplicar por 4; como se le han asignado dos fichas blancas con X y una amarilla,él entrega ocho amarillas con X y cuatro blancas. Y esto es lo que se escribe.

Con esta estrategia de pensamiento,ante una escritura como la del ejemplo se puede actuar calculando cuántas fichas de cada tipo tiene un equipo u otro y aplicando después la regla. Así : En cuanto a fichas con X , el primer equipo aporta 8 blancas (del primer personaje) y 6 amarillas (del tercero) por lo que,aplicando la regla,se reducen a 2 blancas con X. En cuanto a fichas sin X ,el primer equipo aporta 9 amarillas (4 del primer personaje,3 del segundo y 2 del tercero) y 8 blancas (del tercer personaje) ,por lo que, aplicando la regla de nuevo,se reducen a 1 amarilla. De modo que el primer equipo puede escribir +2X-1 Análogamente se calcula el aporte del segundo equipo y,de la escritura inicial que plantea el problema,se pasa,directamente,a la +2X-1=+3+4X . Quitando a cada equipo 2 blancas con X,resulta -1 = +3 +2X . Regalando ahora 3 amarillas y aplicando la regla,queda -4 = +2 X y,de aquí, +X=-2

UNAS CONSIDERACIONES FINALES

Dejando otros detalles aparte,por fácilmente comprensibles ya, nos interesa insistir en que la actividad expuesta lo ha sido como ejemplo de una interpretación personal, y por lo tanto libre, de lo que significan cosas como *preparación del concepto*, *aproximación a la idea*, *aprendizaje bien dirigido*, en el sentido de *BRUNNER*. Queremos hacer constar que para nosotros, "bien dirigido" no significa que el profesor sea un buen director de la actividad, sino que ésta apunte con acierto a lo que se quiere preparar. Así que, en realidad, esa actividad forma parte del tipo de situaciones a tratar en ese modo de entender el proceso del aprendizaje de las Matemáticas. Por eso, es sólo un ejemplo y, para ser bien comprendido, no puede desligarse de la orientación sistemática del trabajo escolar que conlleva esa tesis.

Otra consideración : Es fácil enunciar variantes del juego que permiten proponer ecuaciones de expresión formal más complicada que las vistas, así como sistemas de ecuaciones lineales con coeficientes enteros Pero, las experiencias realizadas y el seguimiento hecho a los alumnos durante cursos, nos parecen indicar que no son necesarias. Llegado el tiempo de estudiar el número entero y las operaciones con ellos, la rapidez y claridad de comprensión de lo que es una ecuación lineal y cómo se resuelve es ostensiblemente mayor en los alumnos que han tenido una preparación como la expuesta que en los que no, pero no hay diferencia (no la ha habido en nuestras pruebas) entre los que sólo tienen esa preparación y los que la tienen ampliada a otro tipo de ecuaciones. Por ello, terminamos aquí nuestra exposición.

SOC. CANARIA DE PROFS. DE MATS. "I.N."