S.C.P.M. "ISAAC NEWTON" NUMEROS 20 - 1990

NOTA SOBRE RADICALES Y RAICES

Antonio Martinón, Ana A. Pérez, M. Dolores Sauret, Teresa Vázquez

(Instituto de Bachillerato Anaga. Santa Cruz de Tenerife)

Con esta nota se pretende llamar la atención del profesorado acerca de la enseñanza de los radicales. En la introducción se dan varios ejemplos que ponen de manifiesto algunos riesgos de un uso poco cuidadoso de los radicales.

Se insiste en la necesidad de diferenciar las nociones de raiz y de radical, estimándose conveniente restringir el símbolo $\sqrt[n]{a}$, para $a \in \mathbb{R}$, al caso $a \geq 0$. Se hacen algunas observaciones sobre los radicales en el cuerpo $\mathbb{C}$ de los números complejos y se finaliza con algunos comentarios sobre las potencias en $\mathbb{R}$.

1. INTRODUCCION

¿Qué significa $\sqrt{4}$? La mayoría de los autores le atribuyen un significado que permite escribir

$$\sqrt{4} = 2$$

Sin embargo, algunos optan por una expresión ambigua

$$\sqrt{4} = \begin{cases} +2 \\ -2 \end{cases}$$

Otros lo consideran como un elmento genérico de un conjunto

$$\sqrt{4} = +2,\ -2$$

o bien

$$\sqrt{4} = \pm 2$$

Los tres significados anteriores llevan a expresiones como las siguientes (no usuales), y que corresponden a operaciones con conjuntos de números

$$\sqrt{4} + \sqrt{4} = -4,0,4 = \sqrt{4} - \sqrt{4} = -\sqrt{4} - \sqrt{4}$$

$$\sqrt{4} + \sqrt{9} = -5,-1,1,5 = \sqrt{4} - \sqrt{9} = \sqrt{9} - \sqrt{4}$$

Alguno llega a escribir

$$\sqrt{4} = 2 \quad \text{y} \quad \sqrt{4} = -2$$

lo cual da lugar a evidentes contradicciones.

De igual forma que el propio significado del signo radical es a veces confuso, el cálculo poco ciudadoso con ellos puede llevar a errores. Así, por ejemplo, la siguiente expresión errónea

$$\text{(1)} \qquad a \in \mathbb{R} \Rightarrow \sqrt{a^2} = a$$

conduce a la siguiente falsedad

$$+2 = \sqrt{(+2)^2} = \sqrt{4} = \sqrt{(-2)^2} = -2$$

La expresión correcta

$$\text{(2)} \qquad a \in \mathbb{R} \Rightarrow \sqrt{a^2} = |a|$$

no es habitual encontrarla en textos elementales y manuales, muchos de los cuales incluyen (1). Son excepción los textos que usan (2); así hacen ANTONOV [1], CARUNCHO [6], DOROFEIEV [7], SEGURA DOMENECH [13] y SPIVAK [14].

El uso de (1) permite la siguiente cadena de igualdades, tal como se indica en ANTONOV [1],

$$a,b \in \mathbb{R},\ a \neq 0 \Rightarrow \frac{\sqrt{a^2+2ab+b^2} - \sqrt{a^2-2ab+b^2}}{\sqrt{a^2+2ab+b^2} + \sqrt{a^2-2ab+b^2}} = \frac{\sqrt{(a+b)^2} - \sqrt{(a-b)^2}}{\sqrt{(a+b)^2} + \sqrt{(a-b)^2}} = \frac{b}{a}$$

Tal expresión es falsa para a=2, b=4, pues con ella se obtiene 2 siendo realmente 1/2. Lo correcto es, usando (2),

$$a,b \in \mathbb{R},\ a^2+b^2 \neq 0 \Rightarrow \frac{|a+b| - |a-b|}{|a+b| + |a-b|} = \begin{cases} a/b & \text{si } |a| \leq |b| \\ b/a & \text{si } |b| \leq |a| \end{cases}$$

Las fórmulas trigonométricas en las que aparecen radicales suelen presentarse de forma poca precisa. Tal como se indica en DOROFEIEV [7], debe escribirse

$$a\in\mathbb{R} \Rightarrow |\operatorname{sen}(a/2)| = \sqrt{(1-\cos a)/2}$$

Por otro lado, el producto P_n de los n primeros términos de una progresión geométrica (a_n) de números reales debe escribirse de la siguiente manera

$$|P_n| = \sqrt{(a_1a_n)^n}$$

Por tener relación con lo dicho se señala esta otra expresión que no se encuentra habitualmente

$$a,b\in\mathbb{R},\ a^n>0,\ b>0,\ n\in\mathbb{N},\ \Rightarrow\ \log_b a^n = n\log_b|a|$$

Todo lo señalado hasta aquí se convierte en dificultades a la hora del aprendizaje. Algunos autores, como GARCIA PRADILLO [9] y ROSSIGNEUX [12], han prestado atención a estas dificultades.

La mayor parte de las dificultades surgen por no distinguir entre las nociones de "raiz" y "radical".

2. RAICES Y RADICALES REALES DE UN NUMERO REAL

Recordemos la definición de raíz n-ésima ($n\in\mathbb{N}$, $\mathbb{N}=\{1,2,3,\ldots\}$) real de un número real:

El número real b es raiz n-ésima del número real a si $b^n=a$

La existencia y cantidad de raíces reales de $a\in\mathbb{R}$ viene dada por el siguiente cuadro

$$(3)\qquad a\in\mathbb{R},\ n\begin{cases}\text{par}\begin{cases}a>0 \Rightarrow \text{a tiene dos raíces reales n-ésimas opuestas}\\ a=0 \Rightarrow \text{o es la única raiz real n-ésima de a}\\ a<0 \Rightarrow \text{a no tiene raiz real n-ésima}\end{cases}\\ \text{impar} \Rightarrow \text{a tiene una única raiz real n-ésima}\end{cases}$$

El significado que se le atribuya a $\sqrt[n]{a}$ (léase **radical n-ésimo de a)** debe ser una de las raíces n-ésimas de a. Para el caso de ser $a \geq 0$ (para n par o impar) se define el radical n-ésimo de a, $\sqrt[n]{a}$, como la raíz n-ésima de a no negativa; es decir,

(4) $$a \geq 0,\ n \in \mathbb{N} \Rightarrow [\sqrt[n]{a} = b \Leftrightarrow b^n = a \text{ y } ab \geq 0]$$

Para el caso $a<0$ aparecen ciertas dificultades. Hay dos posibilidades:

Criterio 1: la definición (4) se amplía al caso $a<0$

Criterio 2: no está definido el símbolo $\sqrt[n]{a}$ para $a<0$

Con el criterio 1 se podría escribir

$$\sqrt[3]{-8} = -2$$

Si n es par, no hay raíz y por lo tanto nada puede significar $\sqrt[n]{a}$. Si n es impar, la formulación de las propiedades que verifican los radicales debe complicarse. Por ejemplo, si la siguiente igualdad valiera

$$\sqrt[n]{a} = \sqrt[mn]{a^m}$$

entonces se alcanza la siguiente falsedad

$$-2 = \sqrt[3]{-8} = \sqrt[6]{64} = 2$$

La formulación de la propiedad (5) debería ser sustituída por

$$\begin{cases} a>0 \Rightarrow \sqrt[n]{a} = \sqrt[mn]{a^m} \\ a<0,\ n \text{ impar} \begin{cases} m \text{ par} \Rightarrow \sqrt[n]{a} = -\sqrt[mn]{a^m} \\ m \text{ impar} \Rightarrow \sqrt[n]{a} = \sqrt[mn]{a^m} \end{cases} \end{cases}$$

tal como hace CARUNCHO [6].

Con el criterio 2 no se da significado a $\sqrt[n]{a}$ con $a<0$. La raiz n-ésima de a puede expresarse mediante $-\sqrt[n]{-a}$; así, por ejemplo, la raíz cúbica de -8 se puede expresar como $-\sqrt[3]{8}$. Quedan así conectadas de forma sencilla las nociones de raíz y radical.

Como se ve, el criterio 1 amplía el significado del símbolo radical al caso $a<0$ y n impar, coincide con la raiz, pero complica la formulación de las propiedades. El criterio 2 limita el uso del símbolo radical, permite una expresión sencilla para las raíces usando radicales y la formulación de propiedades es más simple que con el otro criterio.

Las anteriores consideraciones nos llevan a adoptar el criterio 2: no dar significado al símbolo $\sqrt[n]{a}$ cuando es $a<0$. Así hacen ANTONOV [1], BARY [2], BOURBAKI [4], BOUVIER,GEORGE [5], LENTIN, RIVAUD [10], REY PASTOR [11] y ROSSIGNEUX [12]. Otros autores, sin embargo, optan por el criterio 1, como CARUNCHO [6] y GARCIA PRADILLO [9].

Resumiendo escribimos:

> **Se llama radical n-ésimo del número real $a\geq 0$ a su raíz real n-ésima no negativa y se escribe $\sqrt[n]{a}$. Para $a<0$ carece de significado ese símbolo.**

Puede escribirse entonces

$$a,b\in\mathbb{R},\ n\in\mathbb{N} \Rightarrow [\ \sqrt[n]{a} = b \Leftrightarrow a\geq 0,\ b\geq 0,\ b^n=a\ ]$$

Como se ha dicho, con este criterio las raíces pueden expresarse de forma sencilla mediante el uso de los radicales. El siguiente esquema, esencialmente coincidente con (3), indica la relación entre raíces y radicales n-ésimos de un número real.

$$a\in\mathbb{R},\ n \begin{cases} \text{par} \begin{cases} a\geq 0 \Rightarrow \text{las raíces reales n-ésimas de } a \text{ son } \sqrt[n]{a}, -\sqrt[n]{a} \\ a<0 \Rightarrow a \text{ no tiene raiz real n-ésima} \end{cases} \\ \text{impar} \begin{cases} a\geq 0 \Rightarrow \text{la raiz real n-ésima de } a \text{ es } \sqrt[n]{a} \\ a<0 \Rightarrow \text{la raiz real n-ésima de } a \text{ es } -\sqrt[n]{-a} \end{cases} \end{cases}$$

Con objeto de evitar confusiones, sobre las que no parece necesario que se insista más aquí, se reitera ahora que

la expresión $\sqrt[n]{a}$ se lee "radical n-ésimo de a"

y no "raíz n-ésima de a". Algunos autores, como ANTONOV [1] y REY PASTOR

[11], denominan **raiz aritmética n-ésima** al radical n-ésimo.

3. RAICES Y RADICALES EN LOS NUMEROS COMPLEJOS

La definición de raiz n-ésima ($n \in \mathbb{N}$) compleja de un número complejo es similar al caso real:

El número complejo v es raiz n-ésima del número complejo u si $v^n = u$

La situación es ahora más simple: todo número complejo no nulo tiene n raíces n-ésimas distintas; con palabras de REY PASTOR, [11],

> *El problema de la radicación, lleno de excepciones y paradojas en el campo real, obtiene, pues, en el campo complejo, una solución general y sencilla.*

Sin embargo, la sencillez en el comportamiento de las raíces no evita la complicación para el uso del símbolo radical. En $\mathbb{R}$, la definición es equivalente a que $\sqrt[n]{a}$ es la raiz n-ésima no negativa (BOURBAKI [3]). En $\mathbb{R}$, por lo tanto, para definir el radical se usa la estructura ordenada de $\mathbb{R}$. Como $\mathbb{C}$ no admite un orden compatible con su estructura algebraica no cabe dar a $\sqrt[n]{u}$ un significado similar al de $\mathbb{R}$. Por otro lado, teniendo en cuenta que $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$, el significado en $\mathbb{C}$ debe ser ampliación del de $\mathbb{R}$.

GARCIA PRADILLO [9] indica como posible criterio asignar a $\sqrt[n]{u}$ el significado de ser la raíz n-ésima de menor argumento en $[0,2\pi)$. Desde luego, este criterio obligaría a escribir

$$\sqrt[3]{-8} = 1 + \sqrt{3}\, i$$

y no $\sqrt[3]{-8} = -2$, como parece más natural.

Para el caso de radicales cuadrados (n=2), el criterio de LENTIN RIVAUD [10] es $\sqrt{u} = v$ siendo parte real de v positiva, $R(v)>0$. Como las dos raíces cuadradas de u son opuestas, ellas son $\sqrt{u}$ y $-\sqrt{u}$. Completamos este criterio para el caso de u real negativo eligiendo v tal que su parte imaginaria sea positiva, I(v)>0; para u=0 se pone $\sqrt{0} = 0$.

Se puede usar el símbolo radical, como habitualmente se hace, al utilizar la fórmula que da las soluciones de una ecuación de segundo grado. Así, por ejemplo, la ecuación

$$i\, z^2 + (1 - 2i)\, z - 2 = 0 \tag{6}$$

tiene por soluciones

$$z = \frac{-1 + 2i \pm \sqrt{-3 + 4i}}{2i} \tag{7}$$

y, como puede comprobarse, resulta

$$\sqrt{-3 + 4i} = 1 + 2i \quad ; \quad -\sqrt{-3 + 4i} = -1 - 2i$$

de donde las soluciones de (6) son

$$z_1 = 2 \quad ; \quad z_2 = i$$

SPIVAK [14] indica con $\sqrt[n]{u}$ cualquiera de las raíces n–ésimas de u. Para resolver la ecuación (6), la expresión (7) significa entonces una forma abreviada de escribir

$$z = \frac{-1 + 2i + r}{2i}$$

Al tomar r los valores de las raíces cuadradas de $-3 + 4i$, z toma los valores de las soluciones de la ecuación (6).

En consecuencia, estimamos conveniente utilizar el signo radical en $\mathbb{C}$ para el caso n = 2, con el siguiente significado, que es equivalemte al de LENTIN,RIVAUD [10]:

Se dice que el número complejo v es el radical (cuadrado) del número complejo u ≠0, y se escribe $\sqrt{u} = v$, si v es raíz cuadrada de u ($v^2 = u$) y $-\pi/2 < \arg(v) \leq \pi/2$. Además $\sqrt{0} = 0$

Los argumentos se toman en $(-\pi,\pi]$. Con este criterio se escribe

$$\sqrt{-1} = i \quad ; \quad \sqrt{-4} = 2i$$

$$\sqrt{i} = \sqrt{2}/2 + \sqrt{2}i/2 \quad ; \quad \sqrt{2-2i} = 1-i$$

No optamos a favor de ningún criterio para el caso n>2.

4. PROPIEDADES DE LOS RADICALES Y POTENCIAS DE EXPONENTE RACIONAL

Las potencias de base real positiva y exponente racional se definen utilizando radicales y a ellas, en consecuencia, llega también la confusión. Recordemos las definiciones y propiedades de las potencias de base real, según sea la clase de números del exponente.

Sean $a\in\mathbb{R}$ y $n\in\mathbb{N}$ ($\mathbb{N} = \{1,2,3,\ldots\}$). Entonces se define

$$a\in\mathbb{R} \Rightarrow a^1 = a$$

$$a\in\mathbb{R},\ n\in\mathbb{N} \Rightarrow a^n = a^{n-1}a$$

Las propiedades fundamentales son

(p1) $\quad a\in\mathbb{R},\ n,m\in\mathbb{N} \Rightarrow a^n a^m = a^{n+m}$

(p2) $\quad a\in\mathbb{R},\ n,m\in\mathbb{N} \Rightarrow (a^n)^m = a^{nm}$

(p3) $\quad a,b\in\mathbb{R},\ n\in\mathbb{N} \Rightarrow (ab)^n = a^n b^n$

De (p1) se obtiene

$$a\in\mathbb{R},\ m,n\in\mathbb{N} \Rightarrow a^n/a^m = a^{n-m}$$

De (p3) resulta

$$a,b\in\mathbb{R},\ b\neq 0,\ n\in\mathbb{N} \Rightarrow a^n/b^n = (a/b)^n$$

Al ampliar al caso de exponente entero surge una restricción sobre la base, ya que debe ser no nula:

$$a\in\mathbb{R},\ a\neq 0,\ n\in\mathbb{N} \Rightarrow a^{-n} = 1/a^n$$

$$a\in\mathbb{R},\ a\neq 0 \Rightarrow a^0 = 1$$

(La expresión 0^0 no suele recibir significado, como hemos hecho aquí. Una discusión sobre este asunto, donde el autor se inclina por poner $0^0 = 1$, se encuentra en GAGNAIRE [8]). La ampliación verifica las propiedades (p1), (p2) y (p3), limitándose ahora la base : $a \neq 0$.

Veamos una relación de propiedades de los radicales. Inmediatamente de la definición se obtiene

(8) $\qquad a \in \mathbb{R},\ a \geq 0,\ n \in \mathbb{N} \Rightarrow (\sqrt[n]{a})^n = a$

Utilizando propiedades de las potencias resulta

(r1) $\qquad a \in \mathbb{R},\ a > 0,\ n \in \mathbb{N},\ p \in \mathbb{Z} \Rightarrow \sqrt[n]{a^p} = (\sqrt[n]{a})^p$

Caso particular de (r1), utilizando (8) resulta

(9) $\qquad a \in \mathbb{R},\ a \geq 0,\ n \in \mathbb{N} \Rightarrow \sqrt[n]{a^n} = a$

De las propiedades de las potencias y las anteriores resulta

(r2) $\qquad a \in \mathbb{R},\ a > 0,\ m,n \in \mathbb{N},\ p \in \mathbb{Z} \Rightarrow \sqrt[n]{a^p} = \sqrt[nm]{a^{mp}}$

(r3) $\qquad a \in \mathbb{R},\ a \geq 0,\ n,m \in \mathbb{N} \Rightarrow \sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}$

(r4) $\qquad a,b \in \mathbb{R},\ a,b \geq 0,\ n \in \mathbb{N} \Rightarrow \sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a}\ \sqrt[n]{b}$

De (r4) se deduce

(10) $\qquad a,b \in \mathbb{R},\ a \geq 0,\ b > 0,\ n \in \mathbb{N} \Rightarrow \sqrt{a/b} = \sqrt{a}/\sqrt{b}$

Observemos que los exponentes son enteros, mientras que los índices de las raíces son naturales.

Si a, y en su caso b, es negativo las anteriores fórmulas han de modificarse, haciendo intervenir valores absolutos. De las anteriores expresiones hay algunas en las que necesariamente ha de ser $a \geq 0$: (11) y (r3).

(r1') $\qquad a \in \mathbb{R},\ a \neq 0,\ n \in \mathbb{N},\ p \in \mathbb{Z},\ a^p > 0 \Rightarrow \sqrt[n]{a^p} = \left(\sqrt[n]{|a|}\right)^p$

(9') $\qquad a \in \mathbb{R},\ a^n \geq 0,\ n \in \mathbb{N} \Rightarrow \sqrt[n]{a^n} = |a|$

(r2') $\qquad a \in \mathbb{R},\ a \neq 0,\ a^{pm} > 0,\ n,m \in \mathbb{N},\ p \in \mathbb{Z} \Rightarrow \sqrt[nm]{a^{pm}} = \sqrt[n]{|a|^p}$

(r4') $a,b \in \mathbb{R},\ ab \geq 0,\ n \in \mathbb{N} \Rightarrow \sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{|a|}\ \sqrt[n]{|b|}$

(10') $a,b \in \mathbb{R},\ b \neq 0,\ ab \geq 0,\ n \in \mathbb{N} \Rightarrow \sqrt[n]{a/b} = \sqrt[n]{|a|}\ /\ \sqrt[n]{|b|}$

La ampliación al caso de exponente racional, restringe aún más la base, ya que ahora debe ser positiva.

$$a \in \mathbb{R},\ a>0,\ r \in \mathbb{Q},\ p \in \mathbb{Z},\ n \in \mathbb{N},\ r=p/n \Rightarrow a^r = \sqrt[n]{a^p}$$

La definición no depende de la elección de p y n. Se verifican las propiedades (p1), (p2) y (p3) de las potencias, siendo siempre las bases positivas.

(p1) $a \in \mathbb{R},\ a>0,\ r,s \in \mathbb{Q} \Rightarrow a^r a^s = a^{r+s}$

(p2) $a \in \mathbb{R},\ a>0,\ r,s \in \mathbb{Q} \Rightarrow (a^r)^s = a^{rs}$

(p3) $a,b \in \mathbb{R},\ a>0,\ b>0,\ r \in \mathbb{Q} \Rightarrow (ab)^r = a^r b^r$

REFERENCIAS

[1] ANTONOV, N.; VYGODSKY, M.; NIKITIN, V.; SANKIN, A.:"1000 problemas de aritmética, álgebra, geometría y trigonometría". Paraninfo, Madrid, 1977

[2] BARY, C.; BOIREL, R.; BUISSON, P.; FEVRE, D.; GAUTIER, N.; GLAYMANN, M.; PASCAL, M.; RUSSO, F.; WARUSFEL, A.: "Las Matemáticas". Mensajero, Bilbao, 1978.

[3] BOURBAKI, N.: "Eléments de Mathématique. Algèbre. Chaps.6,7". Hermann, Paris, 1964.

[4] BOURBAKI, N.: "Eléments de Mathématique. Toplogie Générale. Chaps.1-4" Hermann, Paris, 1971.

[5] BOUVIER, A., GEORGE, M.: "Diccionario de Matemáticas". Akal, Madrid, 1984.

[6] CARUNCHO, J.; GUTIERREZ, M.; GIL, J.: "Matemáticas I BUP". Santillana, Madrid, 1985.

[7] DOROFEIEV,G.; POTAPOV, M.; ROZOV, N.: "Temas selectos de Matemáticas elementales". Mir, Moscú, 1973.

[8] GAGNAIRE, P.: "0^0 existe! Je l'ai rencontré". Bull. APMEP, 346 (1984), 624-626.

[9] GARCIA PRADILLO, J.: "¿Radicales semejantes? ¿Números semejantes?". Gaceta Mat., 24 (1972), 61-71.

[10] LENTIN, A.; RIVAUD, J.: "Algebra moderna". Aguilar, Madrid, 1965.

[11] REY PASTOR, J.: "Elementos de Análisis algebraico". Madrid, 1966.

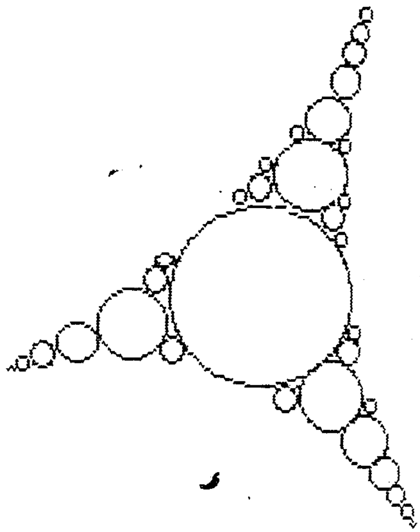
[12] ROSSIGNEUX, L.: "Racines carrées-radicaux: le bon choix du vocabulaire". Bull. APMEP, 343 (1984), 229-230.

[13] SEGURA DOMENECH, S.: "Matemáticas 1 BUP". E. López Mezquida, Valencia, 1976.

[14] SPIVAK, M.: "Calculus. Cálculo infinitesimal". Reverté, Barcelona,1970

MATEMATICA EDUCATIVA

AÑO I, No. 1, JUNIO, 1989



REVISTA DE DIFUSION DEL

CENTRO DE INVESTIGACION Y DOCENCIA EN MATEMATICA EDUCATIVA

UNIVERSIDAD DE SONORA