NUMEROS.20 - 1990
S.C.P.M. "ISAAC NEWTON

CONSTRUCCION DE TABLAS TRIGONOMETRICAS SEGUN EL METODO DE THOMAS SIMPSON

SANTIAGO FERNÁNDEZ FERNÁNDEZ
I.F.P. DE ERANDIO
VIZCAYA

Cualquier persona que haya trabajado la Trigonometría con una cierta profundidad, se da cuenta de la gran dificultad con la que se enfrentaría si tratase de elaborar una tabla de trigonometría de 10'' en 10''. Es fácil calcular razones trigonométricas para ángulos de 30°, 15°, 60°, 45°, 22°, 30°,... , etc., ¿pero cómo completar toda la tabla?

Uno de los intentos más interesantes es el debido al matemático inglés Thomas SIMPSON (1710-1761), cuyo nombre ha quedado ligado a la Matemática por la llamada "Regla de Simpson", publicada en 1743 dentro de sus Mathematical Dissertations in Physical and Analytical Subjects. Como sabemos, esta regla sirve para calcular cuadraturas aproximadas utilizando arcos parabólicos. Simpson fue un autodidacta de la Matemática y consiguió ser elegido miembro de la Royal Society en 1745, pero una vida nuy desordenada y turbulenta le conduyo a un fracaso total.

Thomas Simpson fue conocido especialmente por su "Tratado de Algebra", que llegó a ocho ediciones en Londres, entre 1745 y 1809,

1.- ASPECTOS PRELIMINARES.

El método seguido por T. Simpson se basa en una serie de resultados que son los siguientes:

1) Para calcular las tablas naturales, basta hallar los valores de los senos y cosenos de los arcos comprendidos entre 0° y 45°.

2) Un arco menor que 90° es mayor que su seno y menor que su tangente ($\alpha < 90^\circ \Rightarrow sen\ \alpha < \alpha < tag\ \alpha$).

3) Si el arco α decrece de $\pi/2$ a cero, la relación $sen\ \alpha\ /\ \alpha$ se aproxima indefinidamente a la unidad.

4) La diferencia entre un arco (comprendido entre 0 y $\pi/4$) y su seno es menor que la cuarta parte del cubo del arco ($0 < \alpha < \pi/4 \Rightarrow \alpha - sen\ \alpha < \alpha^3/4$).

5) El coseno de un arco comprendido entre 0 y $\frac{\pi}{4}$ es mayor que $1 - \frac{\alpha^2}{2}$ y menor que $1 - \frac{\alpha^2}{2} + \frac{\alpha^4}{16}$ ($0 < \alpha < \frac{\pi}{4} \Rightarrow 1 - \frac{\alpha^2}{2} < cos\ \alpha < 1 - \frac{\alpha^2}{2} + \frac{\alpha^4}{16}$).

PRUEBAS.- Las tres primeras propiedades se pueden deducir fácilmente.

4°) Por ser $tag\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \dfrac{sen\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)} > \frac{\alpha}{2}$, multiplicando esta desigualdad por la igualdad $2\ cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) = 2\cdot\left[1 - sen^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right]$, tenemos que $2\ sen\left(\frac{\alpha}{2}\right)\cdot cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) > \alpha\cdot\left[1 - sen^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right]$,

luego $sen\ \alpha > \alpha - \alpha\ sen^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)$

o bien, $\alpha - sen\ \alpha < \alpha\ sen^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) < \alpha\cdot\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2$

y así tenemos $\alpha - sen\ \alpha < \left(\frac{\alpha}{4}\right)^3$

5°) Por ser $cos\ \alpha = 1 - 2\ sen^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) > 1 - \frac{\alpha^2}{2}$,

de las desigualdades $\frac{\alpha}{2} > sen\left(\frac{\alpha}{2}\right) > \frac{\alpha}{2} - \frac{\alpha^3}{32}$ (según la propiedad 4) elevando al cuadrado todos los miembros de las desigualdades, tenemos:

$$\frac{\alpha^2}{4} > sen^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) > \frac{\alpha^2}{4} - \frac{\alpha^4}{32} + \frac{\alpha^6}{1024} > \frac{\alpha^2}{4} - \frac{\alpha^4}{32}$$

Por ser $cos\ \alpha = 1 - 2\ sen^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) < 1 - 2\left(\frac{\alpha^2}{4} - \frac{\alpha^4}{32}\right) = 1 - \frac{\alpha^2}{2} + \frac{\alpha^4}{16}$, queda así demostrada la propiedad 5.

2.- CONSTRUCCIÓN DE TABLAS TRIGONOMÉTRICAS.

El procedimiento se basa en dos ideas:

1) Cálculo del *sen* 10'' y *cos* 10'':

Tomando $\alpha = 10'' = \frac{\pi}{64800} = 0'000048481368110 \ldots < 5\cdot 10^{-5}$, como sabemos que $\alpha - sen\ \alpha < \frac{\alpha^3}{4} < 31'25\cdot 10^{-15}$, podemos deducir fácilmente que:

$$0'000048481368110 \ldots > sen\ 10'' > 0'000048481368079 \ldots$$

Por tanto: $sen\ 10'' = 0'0000484813680$, con un error menor que 10^{-13}.

Para calcular el *cos* 10'' tenemos en cuenta las desigualdades

$1 - \frac{\alpha^2}{2} < cos\ \alpha < 1 - \frac{\alpha^2}{2} + \frac{\alpha^4}{16}$ y, además, que $\alpha < 5\cdot 10^{-5}$, obteniendo:
$cos\ 10'' = 0'9999999988248$

2°) Aplicando las reglas de "prosthaphaeresis", es decir, reglas que transforman los productos en sumas, o bien, recíprocamente:

$$sen\ (\hat{A} + \hat{B}) + sen\ (\hat{A} - \hat{B}) = 2\cdot sen\ \hat{A} \cdot cos\ \hat{B}$$

$$cos\ (\hat{A} + \hat{B}) + cos\ (\hat{A} - \hat{B}) = 2\cdot cos\ \hat{A} \cdot cos\ \hat{B}$$

y tomando $\hat{A} = n\cdot\hat{B}$, $\hat{B} = 10''$, siendo $1 \leq n \leq 16200$ (número de veces que 45° contiene a 10''), tenemos:

para $n = 1$, $sen\ 20'' = 2\ sen\ 10''\cdot cos\ 10'' - sen\ 0^{\circ}$

$cos\ 20'' = 2\ cos\ 10''\cdot cos\ 10'' - cos\ 0^{\circ}$.

Conocidos el *sen* 20'' y el *cos* 20'' podemos calcular:

para $n = 2$, $sen\ 30'' = 2\ sen\ 20''\cdot cos\ 10'' - sen\ 10''$

$cos\ 30'' = 2\ cos\ 20''\cdot cos\ 10'' - cos\ 10''$

Y así sucesivamente. De forma que, en general:

$$sen\ \left[(n+1)\cdot 10''\right] = 2\ sen\ (n\cdot 10'')\cdot cos\ 10'' - sen\ \left[(n-1)\cdot 10''\right]$$

$$cos\ \left[(n+1)\cdot 10''\right] = 2\ cos\ (n\cdot 10'')\cdot cos\ 10'' - cos\ \left[(n-1)\cdot 10''\right].$$

Es de observar que este esquema se presta a tratamiento informático.