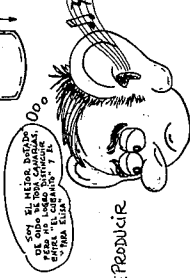
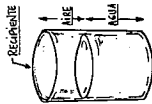


Las Matemáticas y la Música

Utilización del proceso de ajuste de mínimos cuadrados para afinar un conjunto de vasos de agua y formar una escala musical.

ES SABIDO QUE AL GOLPEAR UN RECIPIENTE, ÉSTE Y LA SUSTANCIA QUE CONTIENE (AIRE, AGUA, VINO,...) VÍBRAN Y PRODUCEN UN SONIDO DE UNA DETERMINADA FRECUENCIA. ESTA FRECUENCIA DEPENDE DEL MATERIAL DEL RECIPIENTE, DE LA SUSTANCIA QUE CONTIENE, DEL TAMAÑO DE LA CAVIDAD DE AIRE, ETC...



EXPERIMENTO:

- 1) LEJAMOS 5 VASOS CILÍNDRICOS IGUALES CON DISTINTAS CANTIDADES DE AGUA HASTA CONSEGUIR REPRODUCIR LOS SONIDOS DO, RE, MI, FA, SOL (PARA ESTE PUNTO HACE FALTA BIEN OÍDO MUSICAL)

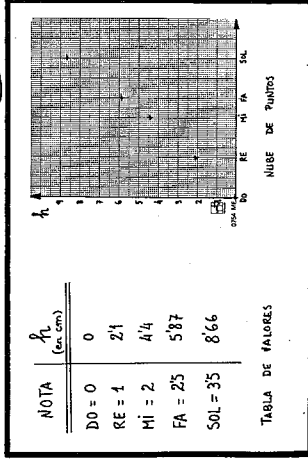
2) MEDIMOS LA ALTURA λ DE LA CAVIDAD DE AIRE EN CADA UNO DE ELLOS.

3) HACEMOS UNA TABLA DE VALORES, ASIGNANDO A CADA NOTA LA ALTURA λ

¡¡¡¡¡¡ LA ALTURA LA HACE DE PUNTOS, LA NOTA INDICADA.



4) REPRESENTAMOS LA 'NUBE DE PUNTOS'

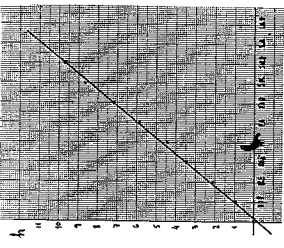


5 AJUSTAMOS UNA RECTA DE REGRESIÓN POR EL MÉTODO DE LOS MÍNIMOS CUADRADOS Y RESULTA $Y = 2.47X - 0.24$
 EL COEFICIENTE DE CORRELACIÓN ES $r = 0.997$, LO QUE QUIERE DECIR QUE EL AJUSTE ES MUY BUENO.

6 AHORA PODEMOS CALCULAR VALORES INTERMEDIOS PARA LOS TONOS SOSTENIDOS (TECLAS NEGRAS DEL PIANO).
 PARA ELLO UTILIZAMOS LA FÓRMULA DE AJUSTE Y RESULTA LA TABLA AMPLIADA

NOTA	f_k
DO = 0	
DO# = 0.5	0.995
RE = 1	3.465
RE# = 1.5	
MI = 2	7.47
FA = 2.5	
FA# = 3	9.64
SOL# = 4	10.87
LA = 4.5	

Ajuste lineal

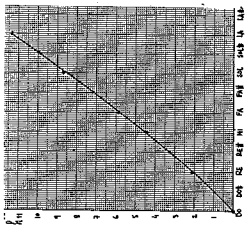


7 PARA UN OÍDO MUSICAL EXIGENTE ALGÚN VASO PUEDE PARECER DESAFINADO (DE HECHO LO ESTÁN); POR ELLO HEMOS MEJORADO LA FUNCIÓN DE AJUSTE UTILIZANDO UNA FUNCIÓN POTENCIAL $Y = A \cdot X^B$ Y LA HEMOS AJUSTADO A LOS DATOS INICIALES POR EL MÉTODO DE LOS MÍNIMOS CUADRADOS (TOMANDO PREVIAMENTE LOGARITMO NEPERIANO). RESULTA $Y = 2.074 \cdot X^{1.13}$ CON $r = 0.999$ (MEJOR AJUSTE QUE ANTES).

8 VOLVEMOS A CALCULAR LOS TONOS INTERMEDIOS PARA LA NUEVA FÓRMULA Y SE OBTIENE OTRA TABLA:

NOTA	f_k
DO# = 0.5	0.994
RE# = 1.5	3.28
FA# = 3	7.18
SOL# = 4	9.93
LA = 4.5	11.35

Ajuste potencial



EXPERIMENTALMENTE HEMOS NOTADO UNA MEJORÍA EN EL AFINADO DEL INSTRUMENTO





flauta tipo Pan

ESTE EXPERIMENTO SE PUEDE REPETIR MODIFICANDO EL INSTRUMENTO. POR EJEMPLO, COMIANDO TUBOS DE CAÑA DE IGUAL DIAMETRO Y DIFERENTES LONGITUDES Y SOPLANDO POR ELLOS, SE PRODUCE UNA VIBRACION DEL AIRE EN UNA CIERTA FRECUENCIA. SE PUEDE REPETIR TODO EL PROCESO ANTERIOR CON LAS LONGITUDES DE LAS CAÑAS Y AFINAR UNA FLAUTA TIPO "PINKILLO", "RONDADOR", "SIKU"...

Erastado de una guitarra

EXISTE UNA FORMULA DE ACUSTICA QUE RELACIONA LA LONGITUD DE UNA CUERDA VIBRANTE CON SU FRECUENCIA DE VIBRACION.

$$f = \frac{1}{2L} \cdot K$$

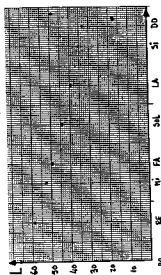
K = cte. que depende de la cuerda y su tension

SE SABE TAMBIEN LA RELACION DE FRECUENCIAS

$f(Do) = 8$	$f(Re) = 9$	$f(Mi) = 15$	$f(Fa) = 8$	$f(La) = 8$	$f(Si) = 15$
$f(Re) = 9$	$f(Mi) = 10$	$f(Fa) = 16$	$f(Sol) = 9$	$f(La) = 10$	$f(Do) = 16$

UTILIZANDO LA FORMULA ANTERIOR SE PUEDE DEDUCIR LA LONGITUD, L, A LA QUE HAY QUE COLOCAR LOS TRASTES. HEMOS OBTENIDO LOS SIGUIENTES VALORES PARA UNA CUERDA DE 66 CM

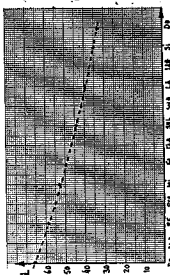
NOTA	L
DO	66
RE	58.6
MI	52.8
FA	44.5
SOL	44
LA	39.6
SI	35.2
DO	33



HEMOS AJUSTADO UNA EXPONENCIAL DE REGRESION, RESULTANDO CON $P = -0.9998$. PARA LOS TONOS INTERMEDIOS LAS LONGITUDES SON:

NOTA	L
DO	62.24
RE	55.58
FA	46.94
SOL	41.71
LA	37.19

Ajuste exponencial



$$Y = 66.026 e^{-0.1148X}$$