S.C.P.M. "ISAAC NEWTON" NUMEROS 20

MAQUINAS Y MATEMATICAS

MARÍA JESÚS HERNÁNDEZ GARCÍA
CASIANO RODRÍGUEZ LEÓN
UNIVERSIDAD DE LA LAGUNA

Los conceptos de función (Matemáticas) y máquinas (Ingeniería) son parientes muy próximos, pese a que en la enseñanza actual sea ésta una verdad olvidada y, a veces, desconocida. Un tercer concepto los vincula: el de algoritmo.

Con ejemplos sencillos (un juguete con bolas y palancas, o con redes de neuronas formales) es posible llegar a la idea de *autómata finito*. Esto constituiría el primer paso para una introducción a la Máquina de Turing, un equivalente matemático de los actuales ordenadores y que constituye una extraordinaria herramienta para el conocimiento de las infinitas potencialidades de los mismos. Preguntas ambiguas y polémicas como *¿podrá algún día construirse un ordenador capaz de pensar?*, pueden formularse claramente en el contexto de esta teoría.

La importancia creciente del ordenador en la sociedad -y la enseñanza no es una excepción- justificaría el intento de introducir esta parcela de las Matemáticas en nuestro Bachillerato. Para algunos de nosotros, el concepto lúdico del tema ya es suficiente razón.

Intentaremos explicar la idea abstracta de "máquina". Los conocimientos matemáticos requeridos son los elementales de la teoría de conjuntos. Creemos que, eliminando tal vez algo de terminología, los conceptos están al alcance de un alumno de Bachillerato. V. A. Uspenski describe una experiencia de este tipo, llevada a cabo con escolares, en un librito de la editorial MIR, titulado "MAQUINA DE POST". El tema ofrece además grandes posibilidades para el trabajo en equipo con profesores de los restantes seminarios: Biología, Lingüística, Química, etc.

Un automáta finito es un modelo de un sistema, con entradas y salidas discretas. El sistema puede estar en uno de un número finito de configuraciones internas o "estados". La entrada y el estado actuales del autómata determinan su "conducta" en el instante siguiente. El mecanismo de control de un ascensor es un buen ejemplo de un sistema de estados finitos. El mecanismo no recuerda las peticiones previas de servicio, sino únicamente el piso actual, la dirección de movimiento (arriba o abajo) y la colección de peticiones aún no satisfechas.

En la ciencia de los computadores encontramos muchos ejemplos de sistemas de estados finitos, y la teoría de autómatas es una herramienta muy útil en el diseño de esos sistemas.

Antes de dar una definición rigurosa de autómata de estados finitos, consideraremos algunos ejemplos:

EJEMPLO 1. Históricamente (McCulloch y Pitts [1943]), los autómatas fueron utilizados por primera vez para modelar redes de neuronas. Las neuronas son células con una membrana externa capaz de generar, impulsos nerviosos y una estructura única, la sinapsis, para la transferencia de información de una neurona a la siguiente. Cabe distinguir tres regiones en una neurona: el <u>cuerpo celular</u> o <u>soma</u>, las <u>dendritas</u> y el <u>axón</u>. En el cuerpo de la célula se halla la maquinaria bioquímica para la síntesis de enzimas y otras moléculas esenciales para la vida de la célula. La forma más normal del soma suele ser esférica o piramidal. Las dendritas son finas expansiones que se ramifican en torno al cuerpo de la célula. Juegan un papel principal en la recepción de las señales de entrada. El axón se extiende a partir del cuerpo celular y constituye la vía por la que las señales (unas veces eléctricas y otras por difusión de productos químicos) pueden viajar largas distancias desde el cuerpo celular a otras partes del cerebro y del sistema nervioso.

Se cree que el cerebro humano consta de 10^{11} neuronas, que viene a ser aproximadamente el número de estrellas de nuestra galaxia. El magnífico funcionamiento de nuestro cerebro depende de complejos circuitos consistentes en redes de neuronas. La información pasa de una célula a otra por puntos de contactos especializados llamados <u>sinapsis</u>. Una neurona típica puede tener de 1.000 a 10.000 sinapsis y puede recibir información de algo así como otras 1.000 neuronas.

Vamos pues con nuestro modelo matemático de neurona, que es, sin duda, una fuerte simplificación de la neurona real:

Una determinada neurona sólo disparará un impulso eléctrico a lo largo de su axón si el número de impulsos que llegan a sus dendritas durante un corto periodo de tiempo, denominado <u>periodo de sumación latente</u>, es mayor que una cantidad crítica que llamamos <u>umbral</u> de la neurona. Estos impulsos pueden ayudar o impedir el disparo de nuestra neurona, y se dicen, respectivamente, <u>excitadores</u> o <u>inhibidores</u>.

La figura 1 muestra una sencilla red neuronal. Cada neurona es representada por un triángulo. El número en el interior del triángulo denota el umbral de la neurona. Las sinapsis excitadoras están representadas por circulitos blancos y, por negros, las inhibidoras. Una neurona produce una salida 1 (dispara) si el número de impulsos excitadores excede al número de impulsos inhibidores en al menos el umbral. Suponemos además que todas las neuronas trabajan con la misma escala de tiempos. El "estado" de la "red neuronal" en cada instante (aquí los tiempos son discretos) viene determinado por el conocimiento de qué neuronas están disparando y cuáles no. Por ejemplo, supongamos que en el instante inicial las cuatro neuronas A, B, C y D están a 0,

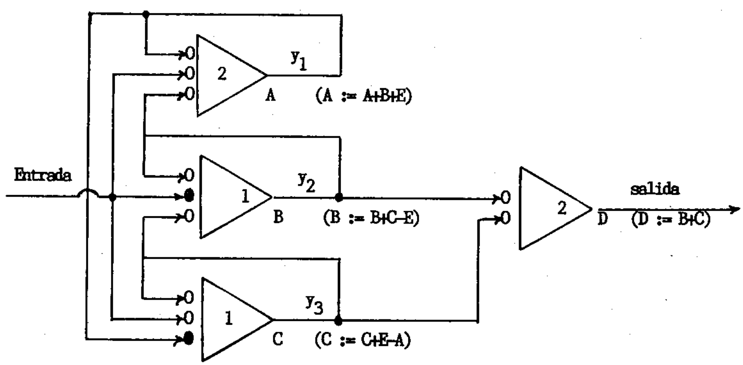

FIG. 1. Una red neuronal.

esto es, no están disparando. Si la red recibe por su entrada un impulso unitario, la evolución sería:

TIEMPO	A	B	C	D	ENTRADA	SALIDA
0	0	0	0	0	1	
1	0	0	1	0	1	0
2	0	0	1	0		0

FIG. 2. Tabla de evolución.

Esto es, la neurona A recibe en el instante 1 una señal excitadora desde la red, pero ninguna señal en su sinapsis conectada al axón de la neurona B, y tampoco en la sinapsis conectada a su propio axón; por tanto, la entrada total a la neurona A es 1. Puesto que su umbral está fijado en 2, la neurona no disparará en el instante 1. Obsérvese que, si de nuevo la red recibe una entrada 1, en el siguiente instante, 2, la red se estabiliza, es decir, las neuronas permanecen en los mismos estados que tenían anteriormente. Análogamente hacemos los cálculos con las neuronas restantes. ¿Qué ocurriría si ahora entra a la red un cero?.

La evolución sería entonces:

TIEMPO	A	B	C	D	ENTRADA	SALIDA
2	0	0	1	0	0	0
3	0	1	1	0	0	0
4	0	1	1	1	0	1
5	0	1	1	1		1

FIG. 3. Tabla de evolución.

Veamos lo que le ocurre a la neurona B en $t = 3$. Recibe señal en una sinapsis excitadora desde C, mientras las otras sinapsis permanecen a cero. Puesto que su umbral es 1, la neurona disparará. Para $t = 4$, la neurona B recibe señal de su propio axón, autoexcitándose. Este fenómeno recibe el nombre de *feedback* o retroalimentación, y juega un papel primordial en la teoría de sistemas. Obsérvese que B es excitada de nuevo por C, y la sinapsis inhibitoria está a cero por la entrada. Así, el montante de entrada es 2, que supera con mucho el umbral de la neurona: B dispara de nuevo. Obsérvese que para $t = 5$ el estado de la red es (0, 1, 1, 1), que coincide con el estado para $t = 4$. Es evidente que si se repite la entrada cero, la red permanecerá estable.

Lo esencial de nuestro ejemplo es que el comportamiento de una red neuronal viene determinado por las <u>entradas</u> a la red y por el <u>estado interno</u> (n-tupla de los estados de las neuronas que la constituyen) de la misma. Con "determinado" queremos dar a enternder que el conocimiento de la entrada y del estado en un instante dado, nos da el conocimiento completo del estado de la red en el instante siguiente.

EJEMPLO 2. Consideremos el juguete que se muestra en la figura 4. Se arroja una canica por A o por B. Las compuertas x_1, x_2 y x_3 hacen que la canica caiga, bien por el lado derecho, bien por el lado izquierdo. Las compuertas están provistas de resortes y bisagras, de modo que cuando una canica roza en su caída una compuerta -"*flipper*"-, hace que ésta cambie de dirección, con lo que la próxima bola encontrará la compuerta orientada en sentido contrario.

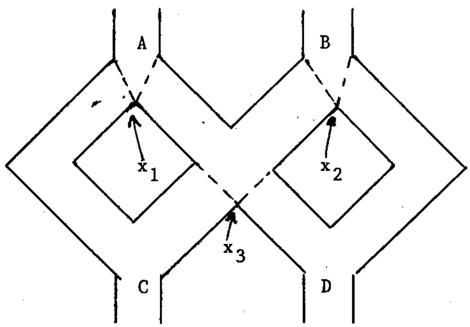

FIG. 4. Un juguete que es un autómata.

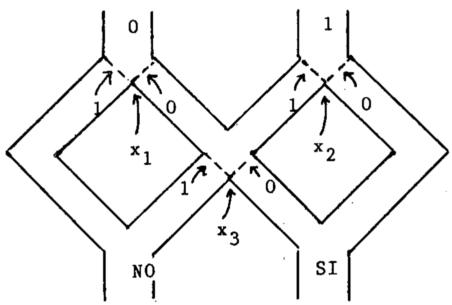

FIG. 5. Una notación adecuada.

Las "entradas" son de dos tipos: canica arrojada por A y canica arrojada por B. Denotemos una canica por A con un 0, y una por B, con un 1. Entonces la secuencia 10010 significa que la primera canica entra por B, la segunda y la tercera por A, la cuarta por B y la quinta por A. Las "salidas" son también de dos tipos: por C o por D. Interpretaremos una salida por D como un "SI", y una salida por C como un "NO". Ahora es cuestión de elegir una nomenclatura adecuada. Denotemos por 0 el hecho de que una puerta x_i cierre el canal a su derecha, y por un 1 el que la puerta x_i cierre el canal a su izquierda. Así, siguiendo el orden dado por las puertas, la terna (1, 0, 0) correspondería al estado del juguete representado en la figura 6:

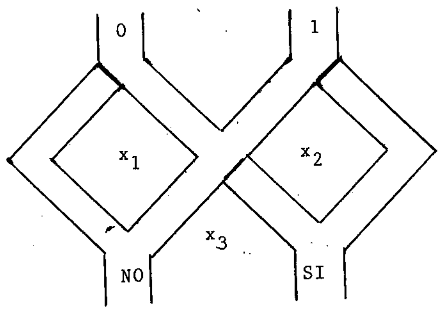

FIG. 6. Estado 100 del juguete.

Nuestro juguete tiene 8 estados posibles, desde el 000 hasta el 111. Imaginemos que el estado inicial, esto es, la posición de las tres compuertas al comienzo de nuestro juego, es 000. Si ahora entramos un cero —lanzamos una canica por A— el estado cambia a 100 y nuestro sencillo "autómata" dice "NO". La conducta del juguete en cualquier situación y para cualquier entrada viene dada por la siguiente tabla:

ESTADO	$x_1x_2x_3$	0 (por A)		1 (por B)	
q_0	000	100	NO	011	NO
q_1	001	101	NO	010	SI
q_2	010	110	NO	000	SI
q_3	011	111	NO	001	SI
q_4	100	001	NO	111	NO
q_5	101	000	SI	110	SI
q_6	110	011	NO	100	SI
q_7	111	010	SI	101	SI

FIG. 7.Tabla de transiciones del juguete.

DEFINICION 1. Un autómata finito determinístico con salidas, o simplemente autómata finito (abreviadamente FA, del inglés Finite Automata), también llamado Máquina de Mealy es una seis-tupla,

$$M = (Q, \Sigma, \Delta, \delta, \lambda, q_o),$$

donde Q es un conjunto finito cuyos elementos se denominan estados internos , y Σ es un conjunto finito denominado alfabeto de entrada del autómata. Sus elementos se denominan símbolos de entrada. Δ es el alfabeto de salida . δ es una aplicación de $Q \times \Sigma$ en Q . Se denomina función de transición y nos da, para un estado y una entrada, el estado siguiente. λ es una aplicación de $Q \times \Sigma$ en Δ y nos proporciona, para una entrada y un estado dados, la salida siguiente. q_o es un elemento de Q especial, denominado estado inicial o estado de arranque.

En el caso de nuestro juguete, su definición formal sería:

$$Q = \left\{ q_o, q_1, q_2, q_3, q_4, q_5, q_6, q_7 \right\} ; \Sigma = \left\{ 0, 1 \right\} ; \Delta = \left\{ SI, NO \right\}.$$

Las funciones de transición "estado siguiente" y "salida siguiente", vienen dadas en la tabla de la figura 7. El estado inicial es q_o = 000.

Podemos ahora plantearnos toda suerte de ejercicios mentales, por ejemplo:

a) Construir un autómata que diga "SI" a aquellas palabras de ceros y unos que terminen en 00.

b) Construir un autómata que diga "SI" a aquellas palabras de ceros y unos que, al ser interpretadas como la representación binaria de un número, sean divisibles por 3.

Con un poco de imaginación y otro poco de voluntad es posible imaginar preguntas a las que algún FA es capaz de responder. Sin embargo, la potencia de los FA es limitada, esto es, existen preguntas a las que ningún FA puede responder.

BIBLIOGRAFÍA

Aiken, H., Babbage Ch. y otros. (1975) "Perspectivas de la revolución de los computadores". Alianza Universidad.

Arbib, Michael A. (1982) "Cerebros, máquinas y matemáticas". Alianza Universidad.

Hopcroft J. E. y Ullman J. D. (1979) "Introduction to automata theory, languages and computation". Addison Wesley.

Kent Ernest W. (1981) "The brains of men and machines". MsGraw Hill.

Investigación y Ciencia. (noviembre 1979). Número especial dedicado al cerebro.

Singh, Jagjit. (1976) "Teoría de la información, del lenguaje y de la cibernética". Alianza Universidad.

Turing, A. M. (1974) "¿Puede pensar una máquina?". Universidad de Valencia. Departamento de lógica y filosofía de la ciencia.

Von Neumann, J. (1980) "El ordenador y el cerebro". Antoni Bosch, editor.

Uspenski, V. A. (1983) "Máquina de Post". Lecciones populares de Matemáticas. Editorial MIR.