NUMEROS, 21
Sept., 1991

# APROXIMACION DIDACTICA AL CONCEPTO DE DERIVADA

María Cruz López de los Mozos Martín
Departamento de Matemática Aplicada
Universidad de Sevilla

## INTRODUCCION

Cuando, en los últimos años de la Enseñanza Media, se introducen conceptos fundamentales del Cálculo Infinitesimal como son el de límite, derivada, integral, etc., lo apretado de los programas, junto con la escacez de tiempo disponible para desarrollarlos, hace que el Cálculo Diferencial sea entendido por el alumno como un conjunto de reglas que se aplican de manera rutinaria al objeto de obtener la derivada de una función, sus puntos críticos, etc. Esta actividad mecánica no va unida, en muchos casos, a un adecuado desarrollo conceptual, lo que conduce a la aparición de distintos errores.

Estas conclusiones se pueden extraer a partir de la investigación de Orton (1983). En ella, un conjunto de alumnos de 16 a 22 años se enfrentó a un cuestionario de ejercicios graduados en dificultad, en torno a los siguientes puntos:

1. Cociente incremental de una función, entendiendo éste como la razón media de cambio.
2. Razón de cambio instantánea.

3. Recta tangente a una curva, considerada como el límite de una sucesión de rectas secantes.

4. Derivada de una función en un punto.

5. Utilización y aplicación del simbolismo.

6. Punto estacionario en una gráfica.

Las respuestas dadas por los encuestados se evaluaron a partir de la categorización de errores de Donaldson (1963), en la que se distinguen tres tipos generales:

a) Errores estructurales: aquellos que implican una comprensión errónea del concepto.

b) Errores operatorios: los que se producen en el desarrollo y ejecución de las operaciones algebraicas necesarias para la completa resolución del ejercicio.

c) Errores arbitrarios: engloban todos los que son fruto del azar y de una eventual falta de atención por motivos internos o debido al contexto de la prueba.

Es necesario matizar que resulta difícil establecer los límites entre estas tres amplias categorías. Un caso significativo, por ejemplo, sería el de considerar una función como $y = f(x) = 3x^2-1$ . Cuando el encuestado debe calcular $f(a + h)$ , la omisión bastante frecuente del doble producto del desarrollo del cuadrado $(a + h)^2$ puede indicar tanto un error estructural como un error meramente operatorio.

Atendiendo a esta clasificación, Orton encontró una gran cantidad de errores estructurales junto a unos errores operatorios menos abundantes. Los de tipo arbitrario resultaban ser irrelevantes. Dentro de los puntos fundamentales de la investigación, los alumnos mostraron grandes dificultades en los cuatro primeros puntos (los de mayor importancia conceptual), encontrando más sencillas las aplicaciones de la derivada y el uso del simbolismo.

Teniendo en cuenta lo anterior, resultará quizá de interés dicutir las conclusiones de esta investigación y, a la par, formular algunas propuestas de cara a la enseñanza de los conceptos objetos de este estudio.

## NECESIDAD DE UNA APROXIMACION INTUITIVA

En muchos libros de texto correspondientes al nivel de Enseñanzas Medias se puede encontrar la definición de derivada de una función en un punto expuesta del siguiente modo:

$$\lim_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \text{ , o bien, } \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

Después de ello, se pasa a la interpretación gráfica de estas expresiones. Esta forma de introducción queda invalidada si se aplican las conclusiones de Orton que, en sus puntos fundamentales, se pueden resumir en dos:

1) La primera aproximación del alumno al Cálculo Diferencial deber ser intuitiva y sin gran formalización algebraica, ya que se ha comprobado que las dificultades operatorias que el alumno tiene en el desarrollo algebraico de las fórmulas hace disminuir la comprensión que pudiera haber tenido inicialmente del concepto.

2) Es necesario, entonces, un gran soporte gráfico al tiempo que se introducen los principales conceptos. También puede ser útil en esta fase el empleo de la calculadora.

Siguiendo estas dos indicaciones, se plantea a continuación una aproximación intuitiva al concepto de derivada a partir de los conceptos de cociente incremental y recta tangente.

## EL COCIENTE INCREMENTAL

Uno de los problemas que plantea este concepto es el de su estrecha relación con otros conceptos, como el de razón y proporción. En efecto, en la recta, la razón de cambio (o pendiente) en un intervalo se calcula fácilmente mediante el triángulo rectángulo construido en dicho intervalo y cuya hipotenusa está situada en la recta. Esta razón de cambio se mantiene igual tanto en un intervalo como en cada punto de la recta.

No ocurre lo mismo, sin embargo, en una curva. En ésta podemos calcular la razón media de cambio o proporción media en que se incrementa la variable dependiente $y$ al incrementarse la independiente $x$, o bien, la razón de cambio en un punto de la curva. Ambos valores son distintos y varían al considerar otro punto y otro intervalo.

Es por ello que la primera aproximación debe ser gráfica y sobre una recta. Si bien es cierto que, en el punto en que se introduce el

Cálculo Diferencial, el alumno conoce ya la ecuación analítica de una recta en el plano a través de diversas modalidades, evitaremos inicialmente su uso.

Situemos unos ejes de coordenadas rectangulares en un papel cuadriculado y tracemos una recta que pase por el origen tal que, cuando la variable $x$ aumente un cuadrado, la variable $y$ aumente otro cuadrado (es, pues, la recta bisectriz del primer cuadrante). En una primera fase conviene evitar las coordenadas en lo posible, aunque su uso constituya la primera intención del alumno.

A partir de este momento y, siempre gráficamente, se podrán extraer dos conclusiones prácticas:

1. La variación "promedio" de la recta en cada cuadrado es igual a la unidad.

2. Si la variable $x$ aumenta, por ejemplo, tres cuadrados, la variable $y$ aumentará también tres. La variación promedio sigue siendo igual a la unidad. Con ello, ya se está trabajando implícitamente con el cociente incremental.

¿Esta variación promedio tiene alguna relación con el ángulo que forma la recta con la parte positiva del eje de las $x$?. ¿Cuál será esa relación?. ¿Qué nombre se le puede adjudicar a esta relación, una vez determinada?. El intento de hallar las respuestas adecuadas a estas preguntas debe conducir a establecer la relación entre el cociente incremental, la pendiente de la recta y la inclinación de la misma. La ausencia de ecuación analítica debe reforzar la comprensión intuitiva de la pendiente como la razón de cambio de $y$ respecto de $x$, y es por ello que la elección de la recta bisectriz no habrá sido fortuita: la tangente de $45^\circ$ es de las mejor recordadas por los alumnos.

En posteriores ejercicios se seguirá con el papel cuadriculado, dando en él un punto fijo A sin coordenadas. El alumno habrá de ejercitarse en construir rectas que, pasando por A, tengan distintas pendientes. Esto se puede hacer en un doble sentido: dada una pendiente, construir la recta asociada que pase por A, o bien, dada una recta ya trazada y pasando por A, obtener su pendiente.

En el mismo papel cuadriculado se dibuja, entonces, una curva y, sobre ella, varios puntos (ver figura 1). ¿Cuál será la razón media de cambio experimentada por la función desde el punto A hasta el punto B? ¿Y del C al D?. Se continuará así sucesivamente.

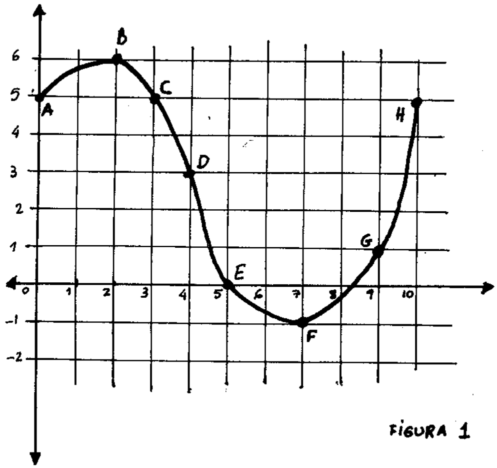


FIGURA 1

En esta primera fase sólo se ha pretendido una aproximación intuitiva y gráfica a los conceptos de pendiente y de cociente incremental. En una segunda fase, más abstracta, se pasará a una formalización de los mismos, utilizando la simbología adecuada, sin olvidar un apoyo continuo en el soporte gráfico. Esto dará oportunidad de revisar los errores operatorios que se puedan producir.

## CONCEPTO DE TANGENTE A UNA CURVA EN UN PUNTO

Un primer planteamiento sobre la naturaleza de la derivada se puede hacer mediante la determinación de la tangente a una curva en un punto. Pero es aquí donde se observa cómo la existencia de un preconcepto erróneo puede dificultar una correcta adquisición posterior. En efecto, la idea que de la recta tangente tiene el alumno se resume en la clásica respuesta: "Es la recta que toca a la gráfica de la curva una sola vez", definición que se revela insuficiente a la luz de distintos ejemplos que se pueden exponer (una curva cortada en un solo punto por una recta, etc).

Al plantearles estos ejemplos, el alumno manifiesta un desconcierto que sirve para introducir la necesidad de una definición más rigurosa de recta tangente a una curva dada en un punto.

Considérese entonces la curva de la figura 2. Se delimita una pequeña zona de la curva alrededor del punto A, lo cual permite incidir en el caracter local de esta búsqueda. Considérese, además del punto A, un punto P móvil sobre la curva que pasa por las sucesivas posiciones $P_1$, $P_2$, $P_3$, etc. Trácense las correspondientes secantes a la curva pasando por el punto A y por cada una de las posiciones que toma P.

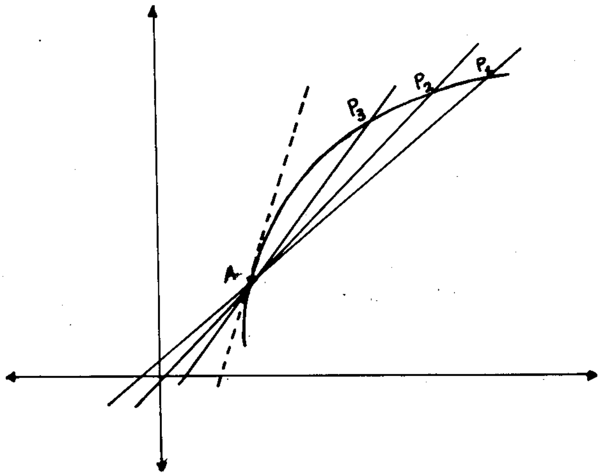


FIGURA 2

¿Se podrían seguir trazando rectas si el punto P está cada vez más cerca de A? ¿Cuántas rectas?.

La comprensión del concepto de límite es aquí fundamental. De hecho, ante la última pregunta hay alumnos que intentan dar una respuesta numérica, lo que se revela como un error estructural. ¿Qué pasaría si el punto P estuviera infinitamente cerca de A?. ¿Qué recta podríamos trazar?. De todo ello se puede extraer una primera definición de recta tangente: "La recta tangente a una curva en un punto A es la posición límite de las rectas secantes a la curva por los puntos A y P, cuando el punto P se aproxima infinitamente al punto A".

Esta definición totalmente intuitiva y en la que no se necesita ninguna herramienta algebraica, debe ser trabajada por los alumnos con distintas curvas, situando el punto A en posiciones diferentes. Posteriormente se pasará a una fase en la que el objetivo consiste en encontrar la expresión analítica de dicha recta.

Considérese de nuevo la curva de la figura 2. El alumno recordará que para definir una recta basta conocer un punto de la misma y su pendiente. Supóngase ahora que la curva $y = f(x)$ de la figura 2 es de ecuación conocida y que el punto A, de coordenadas $(a, f(a))$ , viene dado. Para calcular la ecuación de la recta tangente tan sólo se necesita el valor de su pendiente. Pero si $\alpha$ es la inclinación de la recta tangente, ya se ha visto que $m$ es igual a $tag\,\alpha$ . Por ser la recta tangente la posición límite de las rectas secantes, su pendiente será el límite de la sucesión de pendientes asociada a dichas rectas secantes. Es decir,

$$m = tag\,\alpha = \lim_{p \to a} \alpha_p$$

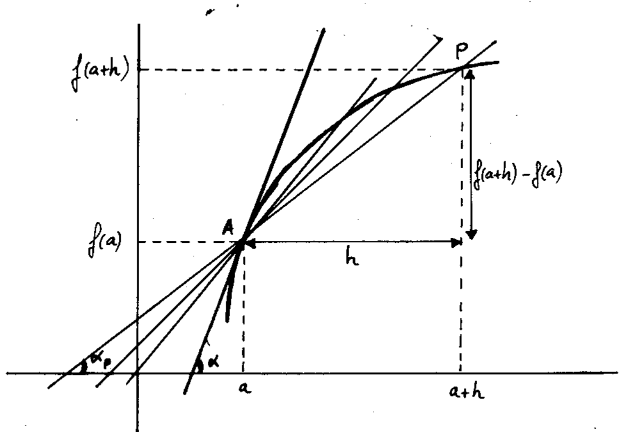


FIGURA 3

Sólo resta calcular la $tag\,\alpha$ como el cociente incremental

$\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ y obtener finalmente la expresión

$$m = tag\,\alpha = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

Como se puede observar, es posible alcanzar el concepto de derivada de una manera intuitiva y no formal, por inducción, y no por deducción a partir de una definición rigurosa pero alejada, en el alumno, del problema que hace necesaria dicha definición. La insistencia mayor ha de hacerse en la construcción del concepto. Mientras este se plantee como una idea ajena al alumno, inamovible en su aparente perfección, será difícil que se desarrolle un verdadero aprendizaje conceptual, lo que conllevará sucesivos errores de tipo estructural.

## REFERENCIAS


DONALDSON, M. 1963: "A study of children's thinking". Tavistock Publications, Londres, pp. 183-185.

ORTON, A. 1983: "Student's understanding of differentiation". Educational Studies in Mathematics, vol. 14, pp. 235-250.