NUMEROS 21
Sept. 1991

EL CUBO Y LA POLILLA

ALGUNOS ASPECTOS DE LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS Y DE LOS PROCESOS DE LA DEMOSTRACIÓN MATEMÁTICA

Manuel Luis de Armas Cruz

INTRODUCCION

En el momento en que fue llevada a cabo la experiencia que describo en este artículo, estaba reflexionando sobre cómo introducir la enseñanza de la Resolución de problemas en mis clases de Matemáticas.

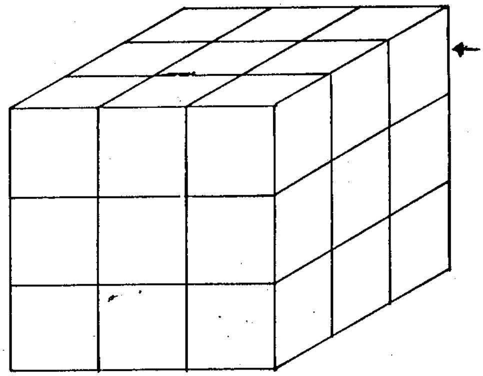
Lo que sigue es un intento de mostrar que, mediante el trabajo de problemas, (no me refiero a ejercicios), se pueden ilustrar los procesos complejos y muchas veces misteriosos de la Resolución de problemas y de la Demostración matemática.

La experiencia fue llevada a cabo en un curso de C.O.U. del I.B. Mencey Acaymo de Güímar (Tenerife), a lo largo de dos sesiones de clase en el año escolar 1987-1988.

PRIMERA SESION

El problema que utilicé, al que siempre he tenido gran estima, lo tomé de "Mathematics on Vacation", de Joseph M. Madachy. Es el siguiente:

"*Un cubo de madera de dimensiones 3x3x3, formado por cubitos de 1x1x1, tiene una polilla comemadera en una de sus esquinas. ¿Podría, partiendo de esa posición, ir horadando cada uno de los cubitos exteriores, sin pasar dos veces por el mismo, y llegar finalmente al cubito interior? (Se supone que la polilla puede pasar de un cubito a otro sólo a través de las caras, no de las aristas)*"



Al proponerlo, indiqué a los alumnos que lo hacía para ilustrar algunos aspectos de la Resolución de problemas y de los procesos de la Demostración matemática.

Como siempre que alguien se enfrenta a un problema suficientemente interesante, la reacción inicial fue de bloqueo. Para evitar deserciones, debidas a encontrar el problema poco claro o al margen de la materia a evaluar, procedí a "enr ollarlos" con preguntas del estilo de las que siguen:

¿Cuántos cubos pequeños hay?

¿Cuántos se ven?

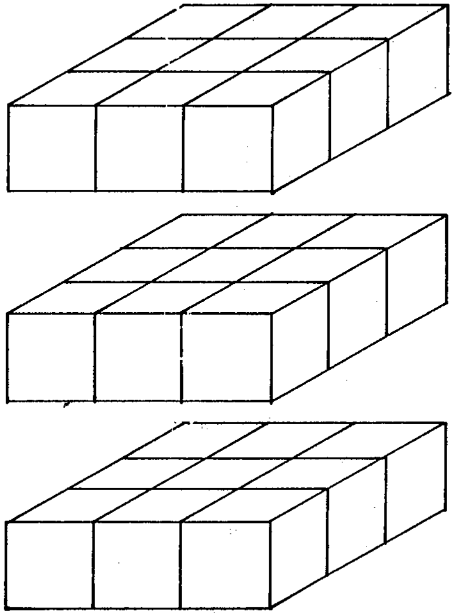
¿Cuántos dan al exterior?

¿Cuántos son interiores?

....

En las respuestas comenzaron a aparecer errores relativos a la visión espacial. Por ejemplo, considerar las caras de los cubitos que están a la vista como pertenecientes a cubitos todos distintos (lo que casualmente coincide con el número total de cubitos: 27). El debate sobre las preguntas formuladas no sólo permitió corregir estos errores -debidos algunos a precipitación- sino que ayudó a fijar las nociones que aparecen en el enunciado del problema y las condiciones establecidas en éste.

Al principio, algunos alumnos tuvieron dificultad en ver la relación entre el cubo (3 dimensiones) y su representación en dos dimensiones. Para ayudarles, les presenté esta figura:



Lo primero que hicieron al enfrentarse al problema, una vez superada la fase de bloqueo, fue intentar hallar un camino, es decir, apostaron por la alternativa "tiene solución" (que denominaremos Conjetura 1), y acto seguido comenzaron a fijar las ideas sobre cómo tendría que ser esa solución.

Uno me preguntó si, forzosamente, tenía que empezar por una esquina. Le contesté: "en principio, sí". Dijo, entonces, que qué quería decir con "en principio, sí", a lo que respondí que el problema habla de caminos que parten de una esquina. Otro preguntó si, necesariamente, tenía que partirse de la esquina indicada en el dibujo. Puede ser desde cualquier esquina, dije, pues basta con girar el cubo adecuadamente para que el punto de partida coincida con el señalado. Comprendieron fácilmente esta simetría que se da en el problema.

La primera tentativa, para comprobar la conjetura hecha, es decir, "tiene solución", o, de una forma más precisa, "*existe un camino que cumple los requisitos del problema*", es utilizar el método de tanteo y error.

Algunos de ellos indicaron que ya habían encontrado un camino, y cuando se les preguntó cuál era, dieron una serie de indicaciones generales mezcladas con gestos indicando giros, como la siguiente: "*Sale de la esquina y va así, así (gestos) hasta llegar al cubo de abajo y luego sube para arriba*". Es curioso que la representación del problema continuaba con cubos de madera y polillas y todavía no se había necesitado una representación más abstracta, es decir, olvidando los aspectos físicos y biológicos del problema.

En realidad con tales descripciones no habían hallado un camino. Sólo indicaban posibles guías para llegar al objetivo, lo cual es bastante importante, pues se traduce en el diseño de un plan para acometer la solución.

Cuando les propuse que numeraran los cubitos, del 1 al 27, y me indicaran sus trayectorias, quedaron sorprendidos. En todos los intentos ... ¡sobraba un cubito! Su plan, al que daban inicialmente un crédito total, no les llevaba a la solución que esperaban. Al verificar el plan, se tornaba falso, al menos en el sentido de la infalibilidad.

A medida que pasaba el tiempo, las actitudes se iban decantando. Empezaron las deserciones ("*No me voy a partir el coco más*", "*Me voy a volver loco con este dichoso problema*"...) y las demandas de seguridad ("*Venga ya, díganos si tiene solución o no*"). Esta última frase tiene mucho jugo; muestra que empiezan a sospechar que ***no existe un camino que cumpla los requisitos***, lo que significa que están viendo como falsa su primera conjetura o, por lo menos, poniéndola en duda.

9	8	7
4	5	6
3	2	1

10	11	12
25	26	13
16	15	14

	22	21
24	23	20
17	18	19

Algunos -sospecho que una mayoría- relacionaban esto con que el problema no tiene solución, lo que da lugar a que entre ellos surgieran reacciones como ésta: "*Me está tomando el pelo; me hace trabajar para buscar algo que sabe que no voy a encontrar*". Otros, menos acomplejados, pero con la misma idea de fondo, coincidieron en: "*¡Qué sentido tiene buscar solución a un problema si no tiene!*"

Y cada vez en mayor número, seguían insistiendo en que les dijera si el problema en cuestión tenía solución o no.

Creo que esta actitud revela una concepción acerca de los problemas: "**Resolver un problema consiste en hallar la solución o las soluciones**". Y detrás de la misma, esta otra: "**Para hallarlas basta disponer del método o algoritmo adecuado**". Y, por supuesto, "**Si no existe solución, el problema no tiene ningún sentido**".

Tal concepción no es errónea, es incompleta. Lo es en cierto tipo de problemas. En el nuestro, en particular, hay que contestar si hay o no un camino que cumpla ciertos requisitos, y ante una respuesta u otra, caben dos actitudes distintas. Si se considera que sí, estamos ante un problema de "hallar", que es el tipo de problemas que los alumnos reconocen; si se opta por la alternativa no, se convierte en un problema de "probar". En éste último caso hay que probar que no existe camino alguno, clase de problemas a los que no están acostumbrados. Normalmente se dan ya resueltos, en los textos o en las exposiciones de clase, bajo el nombre de propiedades o teoremas, que los alumnos no reconocen como problemas. Además, el subtipo "no existe" -caso particular de los llamados teoremas de existencia- no aparece prácticamente en el Bachillerato, lo que añade una dificultad más.

Pero ... continuemos con el relato de lo acaecido en clase. Ante mi negativa a proporcionarles la seguridad que exigían algunos, en realidad pocos, comenzaban a afirmar que "***el problema no tiene solución***" (Conjetura 2). Y cuando les pedí la razón contestaban "porque sí", "porque está claro", ...

Al cabo de un rato, después de reflexionar sobre los tanteos previos que les habían llevado a tal conclusión, dijeron que no se podía hallar el camino que de entrada habían considerado que existía porque ***siempre falta algún cubito***. (A esto llegaron a partir de cuatro o cinco intentos infructuosos al hallar el camino y por los intentos de los demás).

En realidad habían llegado a la conjetura 2-A: ***Si se siguen los requisitos del problema para construir un camino, siempre sobra un cubito, consecuencia de la conjetura 2.***

Para mi sorpresa un alumno propuso (Conjetura 2-B): ***Para que el***

problema tenga solución, el número de cubitos ha de ser par.

Y como en el caso del problema hay un número impar (27), de ésta conjetura se deduce tanto la Conjetura 2 como la 2-A.

Considero sorprendente la conjetura 2-B porque es una forma de formular la conjetura, al margen de su certeza, que podría ser fácilmente generalizable a cubos de mayor tamaño.

Es curioso que esta conjetura la consideraban probada; estaban convencidos de la certeza de la aseveración. Les recomiendé entonces que reflexionaran sobre su nivel de certeza[1], basado sólo en varios casos particulares. Comprendieron así que podían atribuir cierta credibilidad a su conjetura 2, pero no la seguridad absoluta. Sin embargo siguen, y cada vez en mayor medida, convencidos de la bondad de sus conjeturas 2-A y 2-B y como consecuencia de la 2.

Al pedirle que me convencieran y que convencieran a los que todavía se manifestaban partidarios de la conjetura 1 ("tiene solución, pero todavía no la hemos encontrado"), alguien dijo: "Yo lo veo, pero no sé como decirlo".

Me parece importante esta expresión. Revela algo sobre lo que consiste probar, sea ello lo que fuere. Indica que la prueba[2], tiene bastante que ver con "comunicación" y, por tanto, requiere de un lenguaje apropiado en el que expresarla, así como un ejercicio de rigor y precisión en los términos y conceptos que se utilizan en ella.

Suena el timbre. Una vez más, me piden que les diga si existe o no un camino.

SEGUNDA SESION

Dos días más tarde, al iniciar la clase, me estaban esperando con la misma petición con la que se despidieron en la sesión anterior, es decir, "si existe o no el camino". Los pocos que quedaban fieles a la conjetura 1 se habían convertido a la 2. Prácticamente todos -al menos entre los que se manifestaron- se mostraban partidarios de que no existía solución, aunque, teniendo en cuenta su demanda de seguridad, parecían tener ciertas dudas de si lo

[1] Para conjeturas y sus corroboraciones, ver "**Matemáticas y Razonamiento Plausible**" de George Polya, Ed. Tecnos 1966.

[2] Para una discusión histórica y epistemológica del concepto de prueba, véanse las obras de Imre Lakatos "**Pruebas y Refutaciones**", Alianza Ed. 1978 y "**¿Qué es lo que prueba una prueba matemática?**", en "**Matemáticas, Ciencia y Epistemología**", Alianza Universidad 1981.

que pensaban era cierto o no. Su actitud, dotada de cierto olor a apuesta segura, provenía de que, por más que habían intentado encontrar un camino, siempre sobraba un cubito. Apostaban pues, por la conjetura 2, bien apoyados en la 2-A, bien en la 2-B. Algunos, incluso, establecieron una especie de equivalencia entre ambas:

"**siempre sobra un cubito porque el número de cubitos ha de ser par**"

o la siguiente:

"**el número de cubitos tiene que ser par porque siempre sobra uno**"

Y alguien dio un paso más:

"***El número ha de ser par porque siempre sobra o falta un cubito***", que denominaremos conjetura 2-C.

Pregunté ¿por qué están tan seguros? y de nuevo repitieron lo mismo. Se estaba llegando a un punto muerto, y les dije que no me convencerían, ni a ellos mismos, repitiendo una y otra vez algo ya dicho. Uno intentó reforzar su posición con esta nueva forma de expresarlo, interesante, pues abría una salida:

"**si se quita un cubo, el camino se puede realizar**", **ya lo he hecho**.

Pregunté si todo el mundo estaba de acuerdo, y varios corroboraron que era cierto. El resto estaba expectante, probablemente pensando que no habría mucho más que hacer en el problema dadas las circunstancias, pues al parecer la conjetura 2-B estaba probada.

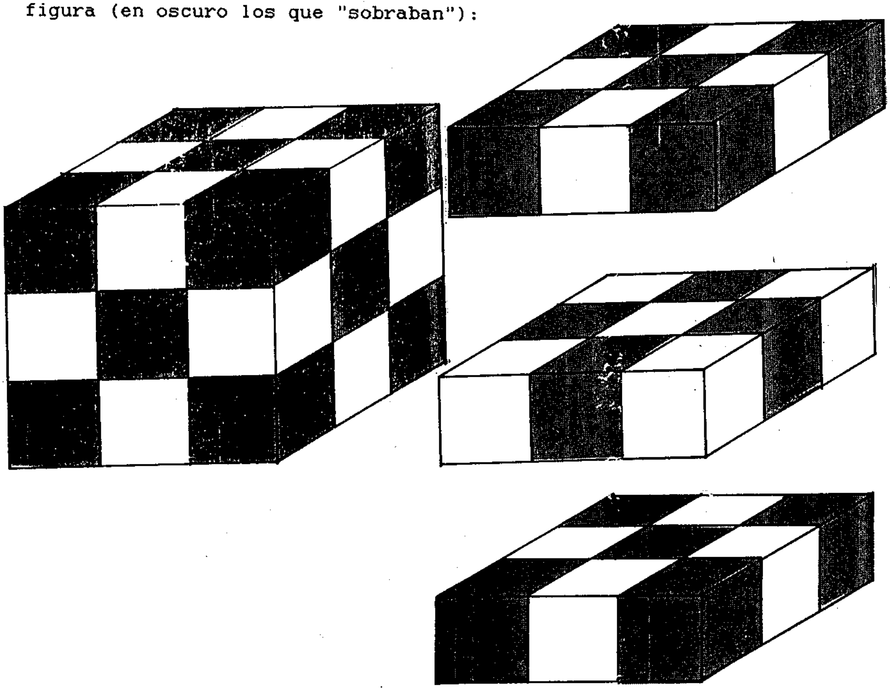
Para animar la discusión, actué de descubridor de contraejemplos. **Si quito un cubito tampoco encontrarán un camino**, aseguré y les indiqué cuál. Así que con un número par de cubitos tampoco se puede hacer, lo que invalida la conjetura 2-B.

Sobrevino de nuevo la inseguridad. Más tarde aparecieron los que se dedicaron a recuperar la conjetura 2-A del desastre. El ambiente queda reflejado en las siguientes opiniones: "Puede que no sea cierta la segunda conjetura, pero a mi siempre me sobra un cubito"; "es verdad, no depende de si el número de cubitos es par o impar, pero siempre sobra uno"; etc.

Empezaron a partir de ese momento a aparecer cubos que "sobraban": alguien aporta los del centro de las caras laterales; otro los centrales de las caras superior e inferior; otro una esquina (no la inicial) y otro, aplicando la simetría que habían comprendido casi al principio, dedujo que todas las esquinas "sobraban", es decir, no eran fundamentales para lograr un camino si se eliminaban del cubo original. Respecto a la posibilidad de eliminar algún cubito situado en el centro de una arista, un alumno indicó que esto acarrearía, no sólo una mayor dificultad para hallar un camino, sino también el que sobraran tres cubitos. Al respecto, uno le argumentó que eso no estaba probado, que lo que podía pasar era que no había encontrado el camino apropiado, pues sólo había comprobado algunas posibilidades. Tal razonamiento no convenció al primero, y manifestó que seguiría manteniendo lo que decía, hasta que alguien le probara lo contrario. Varios se enfrascaron en este trabajo.

Así pues la situación estaba de la siguiente manera: Unos cubos (los centrales de las caras y los de las esquinas) que ciertamente "sobraban" a la hora de hacer un camino que llegara al cubo interno, y otros (los que ocupaban los centros de las aristas) que al parecer "no sobraban", o no se había probado que sobrasen. Esto proporcionaba una clasificación (aunque para algunos sin ningún fundamento o por lo menos dudosa) de unos cubitos que hasta ese momento eran indiferenciables.

Se procedió a señalar en el cubo que teníamos en la pizarra los que por el momento parecían que sobraban. Se obtuvo la siguiente figura (en oscuro los que "sobraban"):



Me sorprendió llegar a este punto, pues conocía una demostración que empleaba ese diagrama para construir la prueba de la imposibilidad de dicho camino, y siempre la había considerado una "idea feliz" con una génesis completamente misteriosa. Muchos otros problemas (de tableros de ajedrez y dominós entre otros) se resolvían con un diagrama parecido. Procuré no traslucir ninguno de mis pensamientos al respecto.

La atención se centró en la pizarra.

Reproduzco algunas de las frases que se oyeron en el debate:

"Si se quitan todos esos, es evidente que no se podría hacer el camino" que algunos se encargaron de precisar "No se trata de quitar todos estos, sino que si quitamos cualquiera de ellos, podemos construir un camino con los requisitos del problema".

"Si se quita este centro de arista... entonces... ¡Estos son fundamentales!.

De estos diálogos surgieron cosas curiosas, entre ellas, un nuevo significado para el camino: en vez de considerar una polilla horadando los cubos, ir quitando ordenadamente cubos, es decir, después de quitar uno, quitar otro adyacente por las caras.

Alguien se fijó en el del centro, que no había sido señalado, y preguntó que pasaba con él. Le contestaron que no influía en el camino puesto que siempre era el último. Se siguió discutiendo durante algún tiempo el por qué eran tan importantes los cubitos de las aristas.

¡Ya está!, ¡ya lo tengo!, dijo uno consiguiendo que toda la atención se centrara en él:

-Cualquier camino parte de un cubo sombreado, (en la pizarra se habían señalado con tiza los que sobraban), después uno blanco, después uno sombreado ...". "Siempre tiene que pasar de un sombreado a uno blanco y luego de nuevo a uno sombreado y siempre así".

Le preguntan que por qué se pone así, que qué importancia tiene eso, a lo que contesta que **hay más cubos sombreados que blancos, uno más, y que para llegar al del centro que tenía que ser blanco, hacían falta el mismo número de sombreados que de blancos, y por lo tanto siempre sobraría uno (sombreado)**. Algunos se muestran de acuerdo con él.

Otros, creo que los que seguían intentando demostrar que los cubos de las aristas también se podían eliminar, le contestaron que todavía no se había demostrado que los cubos de las aristas fueran fundamentales, por lo que la diferenciación entre sombreados y blancos, en que se basaba para probarlo, era ficticia y por lo tanto no consideraban probado que no hubiera solución.

Para ellos, representados por la que lo expresó, toda la discusión que tuvo lugar después de dejar sin demostrar lo real de la clasificación entre "cubos que sobran" y "cubos que no sobran", no tenía ninguna base, y todo lo que se dedujera a partir de ahí no tendría ningún sentido.

Se le contesta desde el mismo punto de vista sin convencerla, hasta que el que expresó la idea le explica que le da igual si son o no fundamentales, que el pinta de negro y blanco de forma alternada los cubitos y los caminos han de ser como el dijo, y como hay 14 negros y 13 blancos siempre en cualquier camino que llegue a un blanco (y el cubo interior lo es) sobrará un cubito negro.

– Y ¿por qué pintas de negro y blanco los cubitos si no tienes ninguna base para hacerlo?

– Y, ¿por qué no puedo pintarlos?

La discusión se acaba. Pregunto a los demás si consideraban probada la conjetura 2-A y por tanto la 2, que si estaban convencidos de ello. Contestan que sí. Algunos proponen, me imagino entusiasmados, buscar otra demostración y otros contestan sonriendo: "no somos tan científicos".

El problema lo habían resuelto en dos o tres días (si se considera el día en medio). En el ambiente se palpaba una satisfacción general, en mi opinión, por haber experimentado de forma real muchos aspectos de lo que significa hacer Matemáticas, y descubrir, simulando el trabajo de un matemático creativo, algo de lo que es la creación y la inteligencia, así cómo se avanza personalmente contrastando las propias ideas y métodos con los de la comunidad.

Quedó para otro día la generalización a cubos mayores.