NUMEROS, 21
Sept., 1991

MATEMATICAS Y MUSICA: EL MATRIMONIO SECRETO

José María Alvarez Falcón.
Sevilla.

INTRODUCCION

Il Matrimonio Segreto es una ópera del compositor italiano Domenico Cimarosa, escrita y estrenada -con enorme éxito- a finales del siglo XVIII. Pero no sólo es eso; de "matrimonio secreto" cabe calificar la relación que existe entre Música y Matemáticas. La razón es obvia: no es frecuente encontrar matemáticos que sepan Teoría musical, y mucho más infrecuente es encontrar músicos que sepan Matemáticas, de ordinario las aborrecen. Mi intención ahora es desvelar, en la medida de lo posible, la relación íntima que existe entre ambas ciencias -que lo son-; sobre todo en lo que se refiere a la construcción, a finales del XVII y a comienzos del XVIII, de la llamada escala temperada o escala de Bach, pues culminó con la publicación de su monumental "*El clave bien temperado*" (1722-1744). Esta escala ha seguido utilizándose hasta nuestros días. Toda la música romántica, posromántica y nacionalista fue escrita utilizando esta escala. Tan sólo con la llegada del impresionismo (Debussy, sobre todo), ha empezado a investigarse en nuevas escalas, que han dado paso a la música serial y concreta contemporánea. Pero desde luego, la llamada música ligera (de películas, Julio Iglesias, Beatles, etc.) sigue hoy utilizando la escala temperada.

¿Y qué es una escala?. No es sino un conjunto de notas, distintas y ordenadas, con las cuales se forma una melodía (haciéndolas oír una tras otra) y/o una armonía (haciendo oír varias de ellas a la vez). Esto último es muy importante, pues complica enormemente la elección de la escala. No se trata de elegir una escala de temperaturas, por ejemplo, ya que no tiene sentido superponer mediciones de éstas -y aún así hay varias-; hay que formar una escala que permita la audición agradable al oído de varias notas a la vez, así como una secuencia melodiosa de notas oídas consecutivamente.

Desde luego este problema no se hubiera planteado si todos los instrumentos tuvieran la capacidad de emitir sonidos de forma continua (violín, voz humana, etc.), pero es obvio que hay instrumentos que sólo emiten un número finito de sonidos (piano, guitarra, arpa, etc). Hay, pues, que elegir esos sonidos. Pero ¿cuáles?

Tenemos, pues, identificado el problema. A lo largo de este trabajo intentaré seguir el método I.D.E.A.L. de resolución de problemas.

PANORAMA

Para llegar a la situación que permitió la construcción de la escala temperada es preciso empezar por Pitágoras. Es de todos conocida la pasión de los pitagóricos por los números como regidores de todo el Universo. La Música no podía escapar de esta norma, y así Pitágoras descubrió que dividiendo una cuerda tensa en proporciones sencillas (1:2, 2:3, etc) los sonidos que se generaban eran melodiosos y armoniosamente superponibles. Les fascinó tanto este descubrimiento que incluso llegaron a hablar de la Armonía de las Esferas, refiriéndose a los cuerpos celestes.

Pero hay que esperar a 1638 para llegar al necesario concepto de frecuencia. En efecto, en ese año publica Galileo sus *DISCORSI* y aquí se atribuye por vez primera la altura de un sonido a la frecuencia y se caracterizan los intervalos musicales (melodías, esto es, sucesión de notas) por las razones (fracciones) entre las frecuencias. Demuestra igualmente que la frecuencia de un sonido es inversamente proporcional a la longitud de la cuerda vibrante que lo produce.

No cabía esperar menos de un genial matemático, que a su vez era hijo de un genial músico del mismo nombre, copartícipe en la invención de la llamada Ars Nova, que conduciría inexorablemente a la ópera y a la música de cámara tal como hoy día la conocemos. Bien es verdad que dos años antes había publicado el P. Marin Mersenne su *Armonía Universal, con la teoría y práctica de la música,* donde se anticipan estos conceptos de modo más embrionario. Paralelamente Gassendi descubre los armónicos: sonidos de frecuencia doble, triple, etc, que se emiten siempre con el sonido fundamental.

Veamos ahora, en lo que nos afecta más directamente, el panorama matemático:

En la primera mitad del siglo XVI Napier (Neper) descubre los logaritmos y publica la primera tabla. Su hijo publicará después todo el proceso de cálculo. A finales del XVII se utilizan ya con soltura, sobre todo gracias a los desarrollos infinitos (fracciones continuas, series, productos infinitos, etc) a los que los matemáticos de este siglo eran tan aficionados (Wallis, Brouncker, Mercator, Gregory...).

No necesitamos más para construir la escala temperada; el terreno está, pues, abonado. Sólo falta la llegada de un teórico que sepa utilizar toda esa información para llevar a cabo la tarea que nos ocupa y que nosotros haremos, con notación actual, por supuesto, en el capítulo siguiente.

Nuestro personaje se llama Andreas Werckmeister, quien, hacia 1700, construyó y afinó por vez primera un instrumento de teclas de acuerdo con la escala temperada.

CONSTRUYENDO LA ESCALA.

Hay una serie de condiciones "razonables" que toda escala debe cumplir. Al decir razonables no debe entenderse "necesarias", esto es, no son demostrables y deben incluirse en la categoría de axiomas. De hecho hay escalas relativamente recientes (Debussy, Bartok, Scriabin) que no las cumplen. No debe extrañarnos; baste recordar lo que ocurrió con los axiomas de Euclides...

Las condiciones referidas son las siguientes:

1. Toda escala que contenga un sonido de frecuencia f, debe contener un sonido de frecuencia 2f.

La razón de esta condición se remonta a Pitágoras, quien descubrió que reduciendo una cuerda vibrante a la mitad (doblando, por tanto, la frecuencia), el sonido generado era el más parecido y superponible al anterior. Nosotros llamamos a esto -(f,2f)- "intervalo de octava", y las notas que se producen tienen incluso el mismo nombre. Más aún, este intervalo cierra la escala y da paso a otro (2f,4f) que es absolutamente equivalente al anterior. Veáse el teclado de un piano (fig. 1).

2. Toda escala que contenga un sonido de frecuencia f, debe contener un sonido de frecuencia 3/2 f.

De nuevo la razón es pitagórica. En efecto, disminuyendo la cuerda a 2/3 de su longitud el sonido generado es, después del anterior (2f) el más armonioso y superponible con el fundamental. Llamamos hoy a este intervalo -(f,3/2f)- "quinta justa" y es el que da el sentido de conclusión al final de toda composición musical (ej. sol-do; mi-la; etc.).

3. Toda melodía interpretada usando las notas de una escala que comience (la escala, no necesariamente la melodía) con la frecuencia f, debe poder interpretarse, sin cambio perceptible, usando otra escala que comience en cualquier otra nota de la escala anterior.

Esta es, sin duda, la condición más delicada y la que realmente aporta elementos nuevos a las escalas usadas hasta entonces. A este cambio de notas sin alterar la melodía original, se llama modulación y es indispensable para que una misma melodía pueda ser cantada por voces de distinta altura (tenor, barítono, contralto, soprano, etc.), o interpretada por instrumentos de diversa tesitura (violín, violoncello, viola, etc.). Hasta la invención de la escala temperada, la transcripción de obras originales para un cierto instrumento, a otras escritas para cualquier otro de distinta tesitura, era prácticamente irrealizable.

Hagamos, por fin, uso de las matemáticas aplicándolas a esta última condición. Consideremos la melodía más simple que se puede fabricar con una escala, esto es, todas las notas de la escala oídas ordenada y sucesivamente:

$$f=f_0<f_1<f_2<\ldots<f_{m-1}<f_m=2f_0$$

donde m representa el número de notas de la escala. (Recordemos que la escala empieza en la nota f y termina en la nota de frecuencia 2f).

Hagamos la transposición más sencilla, esto es, empecémosla por la nota f_1 La nueva melodía terminará pues en la nota f_{n+1}. Como es sabido (Galileo, P. Mersenne) el cociente entre las frecuencias nuevas y antiguas debe ser el mismo para dar al oído la misma sensación. Se tiene, entonces,

$$\frac{f_1}{f_0} = \frac{f_2}{f_1} ; \quad \frac{f_2}{f_1} = \frac{f_3}{f_2} ; \quad \ldots \quad \frac{f_m}{f_{m-1}} = \frac{f_{m+1}}{f_m} \rightarrow$$

$$\frac{f_1}{f_0} = \frac{f_2}{f_1} = \frac{f_3}{f_2} = \ldots = \frac{f_m}{f_{m-1}} = \frac{f_{m+1}}{f_m}$$

Pero la anterior expresión define a la sucesión de notas como una progresión geométrica (*)[1]. Podemos determinar su razón r. Tenemos

$$f_m = r^m . f_0 = 2f_0 \rightarrow r^m = 2 \rightarrow r = \sqrt[m]{2}$$

Parece, pues, lógico tomar logaritmos en base 2 (*) y pasar de una progresión geométrica a una progresión aritmética (*). Esto, sin duda, simplificará los cálculos. (A finales del XVI no había calculadoras electrónicas). Tenemos ahora que la p.g.

$$f_0, f_1, f_2, \ldots, f_m = 2f_0$$

se transforma en una p.a. de diferencia 1/m (*):

$$A, \; A + \frac{1}{m}, \; A + \frac{2}{m}, \; A + \frac{3}{m}, \; \ldots \; , \; A + \frac{m-1}{m}, \; A + \frac{m}{m} = A + 1$$

donde $A = \log_2 f_0$

Viene ahora la pregunta fundamental: ¿Cuánto ha de valer m?, esto es, ¿cuántas notas ha de tener la escala temperada para satisfacer nuestras necesidades?

Para responder a esta cuestión, que definirá perfectamente la escala buscada, hagamos uso del "Axioma 2":

Si la escala debe contener al sonido de frecuencia $(3/2)f_0$, debe corresponder a una cierta nota de la escala. Sea ésta la k-ésima. Recordando la progresión aritmética (logarítmica) tendremos que el logaritmo binario de la nota k-ésima es:

$$A + \frac{k}{m}$$

[1] Los asteriscos indican situaciones donde podría ser útil y conveniente recordar al alumno el concepto utilizado y trabajar con él hasta manejarlo con soltura.

y el mismo logaritmo de la frecuencia $\frac{3}{2}f_0$ es:

$$\log_2 f_0 + \log_2\frac{3}{2} = A + \log_2\frac{3}{2}$$

Se tiene, igualando: $\log_2\frac{3}{2} = \frac{k}{m}$,

ecuación que debería ser verificada para k y m obviamente naturales.

Salta a la vista que esta ecuación es irresoluble. Dicho de otra manera, $\log_2\frac{3}{2}$ es un número irracional, y, por tanto, no puede expresarse como una fracción. (*)

En efecto, por definición de logaritmo se tiene:

$$2^{\frac{k}{m}} = \frac{3}{2}$$

Elevando a la potencia m $2^k = (\frac{3}{2})^m \rightarrow 2^{k+m} = 3^m$

Resulta que el primer miembro es siempre par, mientras que el segundo es siempre impar. Esta contradicción demuestra que una escala temperada no puede contener "quintas justas". Así pues, o renunciamos a las quintas justas o renunciamos a la escala temperada. Veamos, ante tan difícil situación, si podemos encontrar una solución "de compromiso".

Intentemos aproximar lo suficiente (para que el oído no lo note) el número irracional $\log_2\frac{3}{2}$ por una fracción k/m. Usaremos para ello las llamadas fracciones continuas o infinitas (*) de la forma:

$$\cfrac{1}{a_1+\cfrac{1}{a_2+\cfrac{1}{a_3+\cfrac{1}{a_4+\dots}}}}$$

y la iremos aproximando por la sucesión (*) de fracciones reducidas:

$$\frac{1}{a_1}\ ;\ \frac{1}{a_1+\frac{1}{a_2}}\ ;\ \frac{1}{a_1+\frac{1}{a_2+\frac{1}{a_3}}}\ ;\ \ldots$$

Hagamos $x = \log_2\frac{3}{2}$. De la definición de logaritmo se tiene $2^x = \frac{3}{2}$

Se ve fácilmente que $x < 1$. Sustituimos x por $y = 1/x$. Es claro que $y > 1$. La ecuación anterior se escribe, pues, $2^{\frac{1}{y}} = \frac{3}{2} \rightarrow (\frac{3}{2})^y = 2$

Es evidente que y está comprendido entre 1 y 2 (ya que $3/2 < 2$ y $(3/2)^2 = 9/4 > 2$). Hagamos ahora el cambio $y = 1 + 1/z$. Resulta ahora que $z > 1$ (*). La ecuación última queda (*):

$$(\frac{3}{2})^{1+\frac{1}{z}} = 2 \rightarrow \frac{3}{2}(\frac{3}{2})^{\frac{1}{z}} = 2 \rightarrow (\frac{3}{2})^{\frac{1}{z}} = \frac{4}{3}$$

Así: $(\frac{4}{3})^z = \frac{3}{2}$

Resulta, pues que $1 < z < 2$.

El proceso va a repetirse varias veces. Para no resultar muy aburrido intentaré abreviarlo lo más posible, no sin antes indicar que podría utilizarse como ejercicio de ordenación de racionales, en cualquiera de sus formas conocidas, no sólo como fracciones sino como decimales.

Hagamos un cambio similar: $z = 1 + 1/u$. La ecuación queda:

$$(\frac{4}{3})^{1+\frac{1}{u}} = \frac{3}{2} \rightarrow (\frac{4}{3})^{\frac{1}{u}} = \frac{9}{8} \rightarrow (\frac{9}{8})^u = \frac{4}{3}$$

En este caso se tiene (compruébese) que $2<u<3$. Hagamos el nuevo cambio $u = 2 + 1/v$. Obtenemos así: $(\frac{9}{8})^{2+\frac{1}{v}} = \frac{4}{3} \rightarrow (\frac{9}{8})^2(\frac{9}{8})^{\frac{1}{v}} = \frac{4}{3}$

De donde: $(\frac{256}{243})^v = \frac{9}{8}$

Se puede comprobar (quizás aquí sea más útil la calculadora y comparar decimales) que $2 < v < 3$. Es claro que los cálculos son indefinidos, pues el número que queremos aproximar por una fracción continua es irracional; pero podemos pararnos aquí.
Resumiendo, hemos obtenido:

$$x = \frac{1}{y} = \frac{1}{1+\frac{1}{z}} = \frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{n}}} = \frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{2+\frac{1}{v}}}} = \frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{2+\frac{1}{2+\ldots}}}}$$

Las cuatro primeras fracciones reducidas (esto es, valores de k/m que aproximan a $x = \log_2\frac{3}{2}$ son:

$$\frac{1}{1} = 1\ ;\ \frac{1}{1+\frac{1}{1}} = \frac{1}{2}\ ;\ \frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{2}}} = \frac{3}{5}\ ;\ \frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{2+\frac{1}{2}}}} = \frac{7}{12}$$

(No estaría de más observar que son los cuatro primeros términos de una sucesión de racionales que tiene por límite un número irracional. Recuérdese la construcción, ya histórica, de $\mathbb{R}$ con sucesiones de racionales).

El valor, más o menos exacto de $\log_2\frac{3}{2}$ puede conseguirse con una tabla de logaritmos vulgares (o, más recientemente, con calculadora) y un apropiado cambio de base (*). El valor, exacto hasta el tercer decimal, es 0.585.

Las dos primeras aproximaciones son demasiado groseras. La tercera (3/5 = 0.6) no es muy aproximada, pero cabe señalar (recuérdese que el denominador es el número de notas de la escala) que es la utilizada en los países orientales, cuya escala consta de cinco notas (pentatónica) y que suena a nuestros oídos como si la música se interpretara exclusivamente con las notas negras de un piano (ver teclado). El logro de la música occidental consistió en dar un paso más y considerar la siguiente aproximación, esto es 7/12 (= 0.58333...). En efecto, la escala temperada contiene doce sonidos separados por una razón constante de frecuencias. A esta razón constante ($\sqrt[12]{2}$ = intervalo entre teclas consecutivas, blanca-negra o blanca-blanca, si no hay negra entre ambas) se llama semitono, y a dos semitonos consecutivos se le llama tono. Nuestra "cuasi" quinta justa es la 8ª nota de la escala (la primera es f_0 no f_1), como puede comprobarse en el teclado. Veamos ahora cómo ha quedado la escala (fig. 2). Resulta obviamente dividida en 12 notas equidistantes, de las cuales siete son las fundamentales (empezando por do:do-re-mi-fa-sol-la-si), separadas respectivamente por (fig. 2) tono-tono-semitono-tono-tono-tono-semitono. Si queremos conseguir esta misma escala empezando, por ejemplo, por mi, habrá que utilizar teclas negras para mantener la misma separación entre teclas en tonos y semitonos como en la anterior en "do". Si se hace así se comprueba fácilmente que el oído no distingue una escala de la otra.

Puede observarse que la división de la escala no es solamente casual. Digo solamente ya que no cabe negar el papel de la intuición en épocas anteriores para llegar a esta división. De cualquier forma es indiscutible que la división en semitonos iguales, que posibilita la transcripción y modulación de piezas musicales no se hubiera conseguido sin el desarrollo suficiente de la acústica y de las matemáticas que ambas ciencias alcanzaron en Europa al final del XVII. Tan es así, que en fecha tan temprana como el final del siglo XV (1482) el músico español Bartolomé Ramos de Pareja, a la sazón profesor en Bolonia, propuso una escala dividida en doce sonidos equidistantes, atrayéndose la crítica más feroz de sus contemporáneos (de hecho no consiguió nunca una cátedra en esta Universidad) y, lo que es más grave, con la imposibilidad de llevarla a cabo por falta de fundamento teórico necesario, por más que poseyera el convencimiento intuitivo de la necesidad de una escala así construida.

UNA VISION RETROSPECTIVA

Las Matemáticas jugaron ya su papel. Sólo queda responder -muy brevemente y para terminar- a un par de cuestiones que pueden naturalmente plantearse.

1. ¿Es nuestra "cuasi" quinta justa lo suficientemente próxima al intervalo exacto f - 3/2f?

La respuesta es sí, pero hay que esperar a mediados del XIX para tener mediciones absolutas de frecuencias. Hoy podemos asegurar que la diferencia entre ambas es menos de 1Hz, que se supone el umbral diferencial mínimo para el oído humano.

2. ¿Fue la escala temperada inmediatamente aceptada?

Aquí la respuesta es no. Incluso Diderot sostenía, a finales del XVIII, que una escala que no contuviera intervalos justos no podía servir para fines musicales serios. Seguramente no apreciaría la música de Bach (no es raro, en un francés de la época); de otro modo, y después de oír el *Clave bien temperado*, no se explica dicha afirmación.

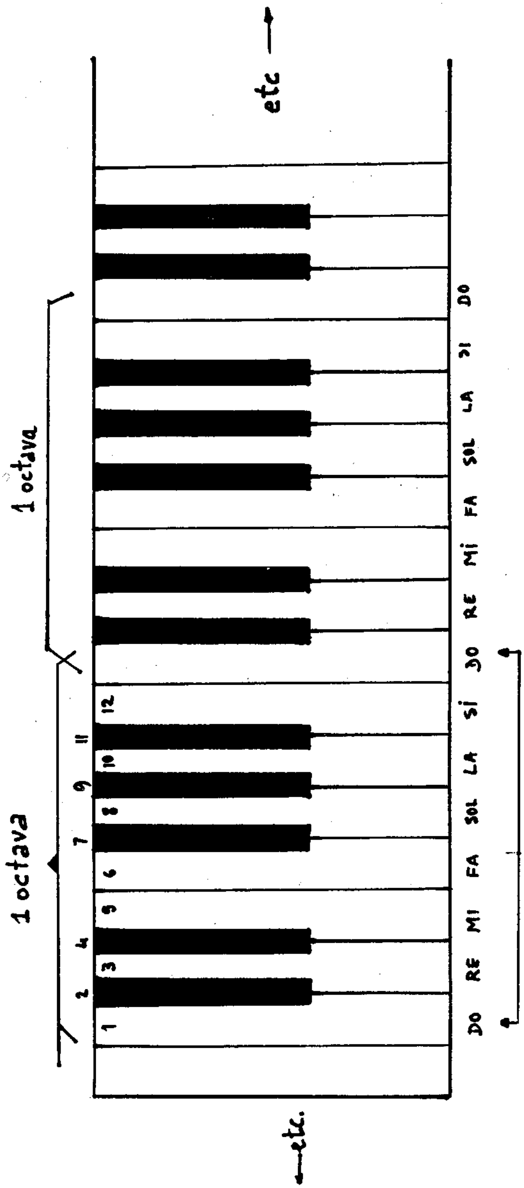
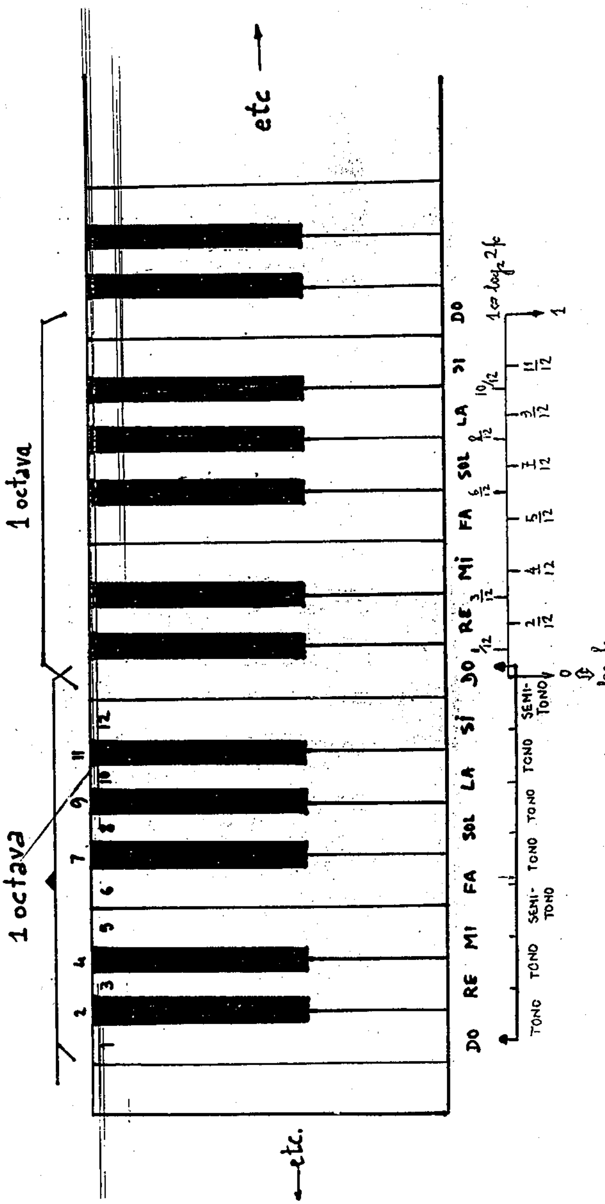

1 octava
1 octava
etc
etc.
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12
DO RE MI FA SOL LA SI DO RE MI FA SOL LA SI DO

fig.1.



1 octava
1 octava
etc
etc.
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12
DO RE MI FA SOL LA SI DO RE MI FA SOL LA SI DO
TONO TONO SEMI-TONO TONO TONO TONO SEMI-TONO
0
1/12 2/12 3/12 4/12 5/12 6/12 7/12 8/12 9/12 10/12 11/12 1
log2 f0
1 = log2 2f0

fig. 2