NUMEROS, 21
Sept., 1991

UN NUEVO ENFOQUE DEL MUNDO DE LOS NUMEROS Y LAS OPERACIONES

Jorge Fernández Herce

INTRODUCCION

Pasé varios minutos hace unos días calculando las cifras del número 19! y las anoté en un papel. Ahora lo he encontrado, pero alguien borró una de las cifras. ¿Habrá algún método sencillo de averiguar su valor?.

19! = 12164?100408832000

Cualquiera que analice con un poco de seriedad el papel de los números y el cálculo, tanto en la Enseñanza Primaria como en la Secundaria, llegará a la conclusión de que su tratamiento es insuficiente.

La irrupción de las calculadoras y el hecho de que no hemos sabido asimilarlas, ha cerrado la vía a un conocimiento engendrado antes por la necesidad de manejar con soltura los números y adquirir agilidad en el cálculo. Hemos dado de lado muchas cuestiones, sin propiciar su sustitución racional por otras.

Aspectos como el estudio de los sistemas de numeración, y en particular el decimal, se introducen sin la profundidad necesaria en la E.G.B. -por considerarse que tienen un nivel demasiado elevado- y en Secundaria brillan por su ausencia.

Al respecto dice [6], pág. 107: "La teoría de congruencias no está incluida en los programas de E.G.B. ya que significa un grado de abstracción demasiado elevado para estos alumnos, y por ello, su estudio debería realizarse en la Enseñanza Secundaria". Huelgan comentarios.

Además, hay quien piensa que "saber operar" es saber efectuar con rapidez y soltura los algoritmos usuales y conocer la prioridad de operaciones.

La pregunta formulada en el inicio de este trabajo es, sin duda, una cuestión de operatoria. Tal como está concebida hoy en general la enseñanza de las Matemáticas, es posible que sea planteada en un concurso de problemas, como juego al margen de la clase o como intrumento auxiliar para captar la atención de los alumnos. En cualquiera de los casos, como mera anécdota, no como aplicación de la más elemental teoría de divisibilidad y congruencias, porque esto no es tema de estudio en ninguna de las etapas de la Enseñanza Primaria o Secundaria.

Hay que hacer que la Teoría de números entre de forma clara en nuestros programas. Quizá dentro del nuevo marco del D.C.B. podamos darle la importancia que merece.

Destaquemos algunos de los aspectos que [8] menciona sobre el tema que queremos abordar: los números y el cálculo.

a) "Un aspecto básico en la familiarización y uso adecuado de los números es la comprensión del sistema de numeración decimal".

b) "... parece comprobado, por ejemplo, que en la Educación Primaria no se alcanza aún la comprensión adecuada de la multiplicación y la división, a pesar de que se puedan desarrollar los algoritmos de cálculo correspondientes".

c) "La mayor o menor funcionalidad del aprendizaje de las operaciones depende de la riqueza de significados que el alumno asocie a cada operación ... Puede servir de ejemplo la invención de un enunciado oral a propósito del cálculo".

d) "La comprensión adecuada del significado de las operaciones con los números y la adquisición de determinadas destrezas de cálculo requiere que se pongan de manifiesto las propiedades elementales de estas operaciones. Pero no debe olvidarse que imoporta menos la explicitación de estas propiedades que su interiorización, de manera que puedan ser utilizadas ..."

¿Qué decir de la calculadora? Cuando se conoce todo su potencial parece realmente increíble el escaso uso que se le da. Y lo más desconcertante es la actitud de avestruz que se toma ante ella. Si se conciben los números y el cálculo como simple mecanización de los algoritmos habituales, este pequeño instrumento es el peor enemigo.

Sólo si el enfoque es diametralmente opuesto, alcanza su verdadero protagonismo en el aula, además de su inevitable implantación social.

e) "La generalización del uso de las calculadoras de bolsillo en la vida cotidiana, obliga a modificar sustancialmente la orientación que debe tomar el aprendizaje de los algoritmos de cálculo ..., la automatización de cálculos largos y tediosos debe abandonarse, permitiendo realizar actividades que pongan el acento en dar sentido a los datos, elegir estrategias de actuación e interpretar resultados".

f) "... , la calculadora en la Enseñanza Secundaria, constituye un material didáctico de gran potencia para la adquisición y refuerzo de contenidos muy diversos ..., apoya y agiliza la búsqueda de regularidades y propiedades en los números y el cálculo: la investigación sobre ... la elaboración de algoritmos de cálculo alternativos a los tradicionales; la familiarización con los conceptos propios de la divisibilidad y con los patrones numéricos más usuales".

Todos éstos, y muchos otros comentarios, pretenden incentivar un nuevo enfoque de los números en la Enseñanza.

Vamos a ilustrar estos puntos con ejemplos. Terminaremos con una referencia concreta a la teoría de congruencias y resolviendo la pregunta con que hemos iniciado estas líneas.

ALGUNOS EJEMPLOS

1.- El sistema de numeración posicional.

Sin lugar a dudas, la máquina de calcular más perfecta que se ha inventado es el sistema de numeración posicional. Estamos tan acostumbrados a su uso que no nos damos cuenta de ello, pero el fundamento de los algoritmos para las operaciones, el cuanta-kilómetros de nuestros coches, el funcionamiento de los ordenadores, ... se basan en él.

En una ocasión alguien me preguntó si existían números decimales en notación romana. Esta es una buena pregunta.

Intentar efectuar una suma en números romanos sin pensar en la notación decimal es prácticamente imposible. Mecanizar el proceso, complicadísimo. Esta es una buena actividad mental.

El mismo caso serviría para concebir el sistema mecánico de un cuenta-kilómetros.

Hay un ejemplo muy claro de que en primero de B.U.P. no se sabe qué es, ni cómo funciona, el sistema de numeración decimal. Lo más penoso del tema es que ni en este ni en cursos posteriores se explica:

Encontrar un número de dos cifras en el que la cifra de las unidades sea el doble que la de las decenas y que ambas sumen 9.

La respuesta por simple tanteo es fácil, pero su planteamiento en términos algebraicos no es tan evidente y, sobre todo, por el desconocimiento del sistema numérico.

Otro ejemplo interesante podría ser este:

Observando los cuadrados de los números de dos cifras que terminan en 5, determinar la forma del resultado sin efectuar la operación de multiplicar:

$$15^2 = 225 \ , \ 25^2 = 625 \ , \ 35^2 = 1225 \ , \ \ldots \ 95^2 = 9025$$

Es fácil llegar a la conclusión por observación reiterada, de que las dos últimas cifras del resultado son "25" y las dos primeras corresponden a $N^2 + N$ si hablamos de $(N5)^2$.

Pero, si vamos más allá de la anécdota y entramos en el por qué, podremos razonar así:

El número de dos cifras acabado en 5 es $10.N + 5$. Elevarlo al cuadrado supone:

$$(10.N + 5)^2 = 100.N^2 + 100.N + 25 = 100\ (N^2 + N) + 25$$

¿Y esto qué significa? $100\ (N^2 + N)$ es un número que tiene dos ceros al final, precedidos por una o dos cifras según sea N. De donde deducimos que, al sumarle 25 obtendremos un número de tres o cuatro cifras de las que las unidades y decenas forman 25 y las demás están determinadas por la expresión $N^2 + N$.

$$65^2 = 100(6^2 + 6) + 25 = 4200 + 25 = 4225$$

Este razonamiento nos ha permitido varias cosas:

- Profundizar en el conocimiento del sistema de numeración posicional decimal.
- Practicar operaciones algebraicas variadas.
- Obtener una resolución clara que permite la generalización inmediata del problema.

2.- Comprensión adecuada de la multiplicación y división.

Es un error muy extendido identificar multiplicación y división con los correspondientes algoritmos habitualmente admitidos. Esta identificación no es absoluto correcta y ya hemos visto cómo se pueden obtener algorimos para casos conretos que simplifican bastante el problema. Para ilustrar más este comentario hagamos alusión al algoritmo ruso de la multiplicación.

Este se fundamenta en reducir al máximo la complejidad de la mutiplicación sin llegar a realizar sumas reiteradas. Se trata de un punto intermedio que acorta el proceso de iteración y, a la vez, se limita a multiplicar y dividir por 2.

Disponemos tres columnas y procedemos así: Escribimos el multiplicando en la segunda y el multiplicador en la tercera. Dividimos por 2 el multiplicando, escribimos debajo el cociente y, en la fila de aquél, pero en la primera columna, anotamos el resto. A continuación, escribimos el doble del multiplicador debajo del mismo. El proceso se repite hasta obtener 0 como cociente.

0	82	91
1	41	182
0	20	364
0	10	728
1	5	1456
0	2	2912
1	1	5824
	0	11648

El producto buscado es "la suma de los números de la tercera columna situados en las filas de los 1 de la primera":

82 x 91 = 182 + 1456 + 5824 = 7462

He aquí la justificación de este algoritmo:

82 x 91 = 82/2 x 2 x 91 = 41 x 182 = 41/2 x 2 x 182 =
(20 + 1/2) x 2 x 182 = 20 + 364 + 182 = 20/2 x 2 x 364 + 182 = 10 x
728 + 182 = 5 x 1456 + 182 = 5/2 x 2 x 1456 + 182 =
(2 + 1/2) x 2 x 1456 + 182 = 2 x 2912 + 1456 + 182 =
1 x 2 x 2912 + 1456 + 182 = 1/2 x 2 x 5824 + 1456 + 182 =
5824 + 1456 + 182

3.- Riqueza de significados asociada a cada operación.

Es fácil encontrar alumnos que dominan la mecánica de los algoritmos de las operaciones elementales y, sin embargo, son incapaces de saber qué operación hay que realizar ante un enunciado concreto. Un ejemplo ilustrativo es el del cálculo del tanto por ciento, que ha adquirido un aspecto plenamente mecánico, asociado innequívocamente con la memorización de las operaciones pertinentes. Hasta tal punto es así que la expresión "5 por ciento de" llega a perder todo su significado. Debería asociarse siempre con "5 de cada 100"; no con "5X/100". Si tengo X y quiero obtener "5 de cada uno de los cientos de X", tendré que hacer "paquetes" de 100 (P = X/100) y, de cada "paquete", obtener 5, esto es, 5P.

4.- Utilización racional de la calculadora.

La mayor parte de los detractores del uso de la calculadora en el aula argumentan que no ayuda en nada al alumno, más bien al contrario, impide que aprenda a operar, pues la máquina lo hace por él. Es difícil hacer cambiar este tipo de opiniones, más aún cuando algunos intentos de utilización activa han ido quizá demasiado lejos, haciendo de ella el instrumento fundamental, cuando en muchas ocasiones no tiene por qué ser así. Ambos extremos pueden ser igualmente nefastos, ocasionando lagunas en uno u otro lado según se potencie excesivamente o no se permita su uso.

Tal vez un tipo de ejercicios que puede ayudar a que algunos detractores no la vean con tan malos ojos, sea el de aquellos en los que la máquina no es suficiente por sí misma y se requiere además un razonamiento avanzado. Por ejemplo, multiplicar 823456 por 73475. Aunque mi calculadora permita 8 ó 10 cifras, el resultado no cabrá en la pantalla. Ciñéndonos exclusivamente al ejercicio, el análisis de las diversas maneras en que puede efectuarse la operación, combinando la calculadora y el cálculo con lápiz y papel, es suficientemente instructivo como para potenciar el uso de áquella.

Otros ejemplos:

a) Efectúa 13:7 y calcula el resto (con calculadora).

b) Si efectúas con tu calculadora 183168554:1458, ¿cúal es el resto?

Pedir el resto de una división hace que la acción del operador no sea pasiva; contribuye a la utilización racional de la calculadora.

c) Hay temas tan serios como el tan famoso N.I.F. (Número de Identificación Fiscal) que se reducen a una simple división y a la comprobación en una tabla. Concretamente he leído en la prensa dos modos de obtener el N.I.F. y ambos tienen su toque esotérico.

"Se toma el número del D.N.I. y se divide por 23; al resto se le suma 1 y al número resultante se le aplica la siguiente correspondencia: 1 - t, 2 - r, 3 - w, 4 - a, 5 - g, 6 - m, 7 -y, 8 - f, 9 - p, 10 - d, 11 - x, 12 - b, 13 - n, 14 - j, 15 -z, 16 - s, 17 - q, 18 - v, 19 - h, 20 - l, 21 - c, 22 - k, 23 - e".

¿Por qué no prescindir de sumar 1 al resto y dar la tabla correspondiente restando 1 a cada número?

El mismo día que esta curiosidad apareció en el diario Canarias 7, un compañero me preguntó si mi calculadora podía calcular el resto de la división. Quizá por este contratiempo, en una conocida revista de divulgación nacional, junto con la misma tabla de conversión aparecía la siguiente descripción del proceso:

Se toma el número del D.N.I. y se divide por 23; se prescinde de los decimales del resultado y se multiplica éste por 23. Lo que sale del producto se resta el número del D.N.I. Con el resultado de la resta se va a la tabla ... (aparecía la correspondiente tabla).

d) Como último ejemplo de los muchos que pueden citarse proponemos el siguiente:

Divide con la calculadora 34215689379654 entre 347. No hay duda de que quien sea capaz de efectuarlo de forma razonada, conoce bastante bien la operación de la división a pesar de que use máquinas de calcular.

34215689379654:7 = ?

34215689 <——> 379654

34215689 | 347   1 379654 | 347

...   ...

... 98604   ... 3975

1   329

COCIENTE:	98043975 ¡NO!	98604003975 ¡SI!
RESTO:	329	329

UN EJERCICIO SENCILLO

En muchos libros de texto antiguos e incluso en libros más específicos de hoy en día, se enumeran diversos trucos de cálculo. La mayor parte carecen de interés práctico en la actualidad por la aparición de las calculadoras, pero muchos de ellos podrían aprovecharse para investigar el por qué de su funcionamiento. De este modo se puede llegar a cuestiones muy interesantes. Veamos algunas.

a) Demuestra que en toda división de un número entero entre 4, el cociente, como máximo, tiene dos cifras decimales.

De las muchas en que se puede abordar, vamos a mencionar 3 que pueden tener interés especial:

– La primera y más elemental supondría estudiar los posibles restos y obtendríamos nuestro objetivo e información adicional.

Resto 0: Divisible entre 4 y carece de cifras decimales.

Resto 1: La parte decimal será 25.

Resto 2: La parte decimal será 5.

Resto 3: La parte decimal será 75.

Como es natural, si el cociente fuese un número más complicado, no parece una buena elección.

– Un método más ingenioso sería observar que $4 = 2^2$ y que dividir por 4 es lo mismo que dividir entre 2 dos veces.

Es claro que cualquier número entero o decimal limitado, al ser dividido entre dos puede aumentar en una, como máximo, sus cifras decimales. Consecuentemente la división entre 4 podría alcanzar 2 cifras decimales como máximo (por ejemplo, 1:4).

– Por último, quizá la forma más rápida y concisa podría derivarse de un pequeño truco de cálculo que tantas veces habremos empleado:

"Multiplicar por 25 es lo mismo que añadir dos ceros al multiplicando (multiplicar por 100) y dividir por 4".

Invirtiendo los términos llegamos a que dividir entre 4 es lo mismo que multiplicar por 25 y dividir entre 100. Como toda multiplicación de enteros es entera y la división entre 100 supone mover la coma dos lugares hacia la izquierda, se obtiene lo que buscábamos.

b) A partir de aquí, razonando en los términos de la tercera solución anterior se puede llegar a resultados muy interesantes.

– ¿Cuántas cifras decimales se obtienen como máximo al dividir un número entero entre 5, 8, 10, 25, ... ?

Es fácil concluir que cuando el divisor se descompone en factores primos y sólo se obtienen potencias de 2 y de 5, el número de decimales es limitado.

- ¿Qué pasará si el dividendo es 3?

Intentando un método similar nos damos cuenta de que, o no se obtiene cifra decimal alguna, o el número de ellas es ilimitado. El primer caso se tratará de un múltiplo de 3, en le segundo, como 3 no divide a ninguna potencia de 10, razonando del mismo modo que para 2, 5, 8, ... , se concluye que las cifras decimales son ilimitadas.

- Imaginemos que el dividendo no es múltiplo de 3. ¿Qué sucede con los decimales de la división?

- ¿Y si el dividendo es cualquier primo distinto de 2 y 5?

- ...

El camino está iniciado para llegar a la obtención del siguiente resultado con el que muchos de nosotros martirizamos a los alumnos de 1º de BUP, haciéndoselo recordar sin justificación alguna:

"Al pasar a número decimal una fracción irreducible obtendremos:

* Un decimal finito, si el denominador admite una descompósición cuyos únicos factores primos sean el 2 y el 5.

* Un decimal periódico puro, si la descomposición del denominador no posee ni 2 ni 5.

* Un decimal periódico mixto, si la descomposión del denominador contiene 2 ó 5 y otros factores distintos".

DIVISIBILIDAD, RESTOS Y CONGRUENCIAS

Es posible que cuando cualquiera de nuestros alumnos finalice sus estudios en el instituto sea capaz de calcular un sofisticado límite utilizando el número **e**. Con toda seguridad, ni sabe lo que es verdaderamente un límite, ni tiene la menor idea de lo que es el número **e**. Muy posiblemente también conozca que un número es divisible entre 3 cuando la suma de sus cifras es múltiplo de 3, pero sea incapaz de justificar esta verdad tan extendida.

Toda teoría de la divisibilidad de números enteros es una mágnífica desconocida. Y como ya hemos indicado, lo mismo sucede con las congruencias.

Es verdaderamente lamentable que para un nivel de C.O.U., e incluso más elevado, sean juegos de magia los más elementales razonamientos sobre teoría de números.

- Una actividad muy conocida es la obtención del número que corresponde a nuestra fecha de nacimiento. Muy pocos saben que se trata simplemente de obtener el resto de dividir entre 9 el número que resulta de adosar el día, mes y año. La teoría de divisibilidad más elemental hace que, en vez de efectuar esta costosa operación podamos proceder como indica la ilustración adjunta, o de muchas otras formas equivalentes:

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Trabajo	B	R	B	B	MB	MB	MB	MB	B
Salud	R	B	MB	B	MB	MB	B	B	R
Amor	B	B	B	MB	B	B	MB	MB	B
Azar	R	B	MB	B	B	B	MB	MB	R
Familia	R	B	R	MB	R	B	B	MB	B
Amistad	B	B	R	MB	B	B	B	B	MB
Viajes	B	R	MB	MB	MB	MB	MB	B	R
Dinero	B	B	MB	B	B	MB	MB	B	MB
Sorpresas	D	F	F	F	F	E	F	F	F
Nº suerte	28	12	15	3	36	48	58	84	2
Días fav.	28	30	29	29	27	30	29	30	29
Días desfav.	28	27	28	24	28	26	25	26	28
Arcano tarot	Siete bastos	Dos espadas	Ocho oros	Sota bastos	Seis oros	Tres copas	Cab. espadas	Rey copas	Seis copas

B=bien, D=desfavorable, E=excelente, F=favorable, M=mal, MB=muy bien, MF=muy favorable, R=regular

¿Cómo averiguar su número de tarot? Sume los números de su fecha de nacimiento y redúzcalos a un sólo dígito. Por ejemplo, 6 de octubre de 1956: 6+10+1+9+5+6=37; 3+7=10; 1+0=1. El 1 es su número.

6 de octubre de 1956 ————> 6 10 1956

1) 6101956 ————> 6 + 1 + 0 + 1 + 9 + 5 + 6 = 28

28 ————> 2 + 8 = 10 ————> 1 + 0 = 1

2) 6101956. Voy sumando las cifras y cuando llegue o pase de 9, resto 9:

6 + 1 = 7

7 + 0 = 7

7 + 1 = 8

8 + 9 = 17 —> 8

8 + 5 = 13 —> 4

4 + 6 = 10 —> 1

3) Otro método algo más costoso consiste en dividir el número entre 9 para obtener el resto:

```
6101956 | 9
        └──────
          677995
   1
```

Todo ello es una aplicación muy sencilla de la divisibilidad entre 9. Las tres formas citadas son modos distintos de obtener el resto de dividir por 9 y son perfectamente equivalentes, como consecuencia del siguiente resultado:

"El resto de dividir un número X entre nueve, es el mismo que el resto de dividir el número que resulta de sumar las cifras de X".

Una aplicación elemental de la teoría de congruencias y, en particular, de congruencias módulo 9, son los siguientes enunciados:

- ¿Qué condición debe cumplir un número para que al restarle la suma de sus cifras sea múltiplo de 9?.

- Piensa un número de tres cifras de modo que la primera y la última difieran en más de una unidad. Permuta la primera y la última; resta el número elegido y el obtenido de permutar. Con el resultado de esta resta se hace lo mismo que con el número de partida, sólo que ahora se suma en vez de restar. El resultado final siempre será 1089.

- La tan famosa prueba del nueve, que lo fue en sus tiempos, es hoy algo desconocido. Al respecto de la misma me han preguntado muchas veces que si era condición necesaria y suficiente para que la división estuviese bien. El desuso de la misma es otra de las consecuencias de la llegada de las calculadoras. Pero no se trata, una vez más, de que la calculadora sea algo malo, sino de que nosotros mismos la hemos arrinconado y ya no la enseñamos.

```
1910 | 13
 61  +------
  90   146
   12

   d=4           divisor:     13 -> 4
-> 2   D=2       Dividendo: 1910 -> 2
   R=2           Cociente:   146 -> 2
                 Resto:       12 -> 3
         ->      d*C+R: 4*2+3=11 -> 2
```

VOLVAMOS A LA CIFRA BORRADA

Para terminar demos respuesta a la cuestión con la que comenzamos:

19! = 121 64? 100 408 832 000

Como es obvio, 19! es múltiplo de 9 y, consecuentemente, el resto de dividir por 9 será 0. Ahora bien, aplicando el método 2) de los citados anteriormente para la obtención de este resto, tenemos:

$1 + 2 + 1 + 6 = 10 \longrightarrow 1 + 4 + 1 + 4 = 10 \longrightarrow 1 + 8 = 9 \longrightarrow$
$0 + 8 + 3 = 11 \longrightarrow 2 + 2 = 4.$

Luego 4 + ? = 9 y, por ello, ? = 5.

El método parece infalible . Prueba con:

17! = 355 687 428 0?6 000

18! = 6 402 373 7?5 720 000

¿Has acertado en ambos casos? ¿Es un método infalible? ...

BIBLIOGRAFIA

[1] A. BELSKI, A.
A. KALUZHNIN, L. "División inexacta". Lecciones populares de Matemáticas. Ed. MIR, 1980.

[2] BARATECH MONTES, Benigno. "MATEMATICAS. Segundo curso de bachillerato", Zaragoza, 1953.

[3] GOMEZ ALFONSO, Bernardo. "Numeración y Cálculo", Ed. Síntesis, Madrid, 1988.

[4] N. NOROBIOV, N., "Criterios de divisibilidad". Lecciones populares de Matemáticas. Ed. MIR, 1984.

[5] REY PASTOR, J. "Elementos de análisis algebraico". Herederos de J. Rey Pastor. Madrid, 1966.

[6] SIERRA, Modesto y otros, "Divisibilidad". Ed. Síntesis. Madrid 1989.

[7] UDINA i ABELLO, Frederic. "Aritmética y calculadoras". Ed. Síntesis, Madrid, 1989.

[8] - , "Diseño Curricular Base. Enseñanza Secundaria Obligatoria". M.E.C., 1989.

[9] - , "Matemáticas. Segundo curso". Ed. Luis Vives. Zaragoza, 1952.