Método geométrico de la raíz cuadrada

Juan Contreras Guerrero

El siguiente trabajo sobre la didáctica de la raíz cuadrada está basado en la interpretación geométrica de la misma. Ha sido fruto de mi experiencia en el aula con los alumnos, motivado sobre todo por la dificultad con la que me encontraba a la hora de explicar algunos pasos del algoritmo relajado, que llamo así por omitir algunas operaciones intermedias.

-¿Qué significado tiene la raíz cuadrada?

-¿Por qué hay que multiplicar por dos la llamada "cajita" de la raíz cuadrada, para obtener cifras de la raíz?

-¿Cómo explicar al alumno que hay que buscar un número, de modo que, colocado detrás del duplo de la raíz parcial y multiplicado por ese mismo número, dé el resto parcial por defecto de la raíz cuadrada?

-¿Por qué el resto debe ser menor que el duplo de la raíz más uno?

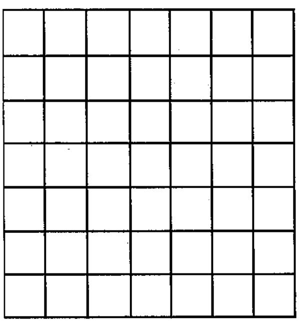
Para entender el algoritmo "formal", presento un método geométrico. Consiste en construir cuadrados de lado cada vez mayor, hasta determinar el lado del mayor cuadrado posible que se puede construir con las unidades del radicando.

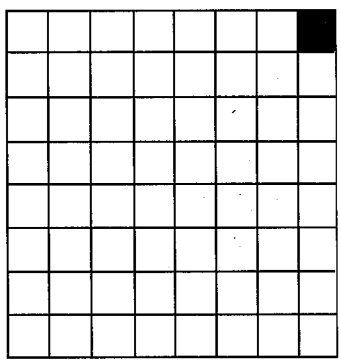
Se empieza con radicandos pequeños, menores que 100. Así, con 36 unidades, el lado del mayor cuadrado posible tendrá 6 unidades, (como unidades empleo cuadrados pequeños). En este caso diremos que la raíz cuadrada de 36 es 6.

Antes de seguir, conviene conocer la siguiente propiedad: si se restan los cuadrados de dos números enteros positivos consecutivos, (el mayor menos el menor), el resultado es igual al doble del menor más uno. Se demuestra fácilmente:

$(n+1)^2-n^2 = n^2+2n+1-n^2 = 2n+1$
$25 - 16 = 9 = 2.4+1$
$81 - 64 = 17 = 2.8+1$

Una vez se haya practicado con cuadrados perfectos menores que 100, se proponen radicandos que no sean cuadrados perfectos. Por ejemplo, el 57. El mayor cuadrado que se puede hacer tendría 7 unidades en cada lado, por lo que sobrarían 8 unidades. Para construir el de lado 8 nos harían falta 15 cuadrados más, esto es, el doble de 7 más 1 y sólo nos quedan 7 unidades. Esto último es la propiedad del resto de la raíz cuadrada: "el resto no puede ser mayor que el doble de la raíz más 1", ya que, de serlo, se podría construir el cuadrado siguiente, es decir, el que tiene de lado una unidad más.


Lado = 7


Lado = 8

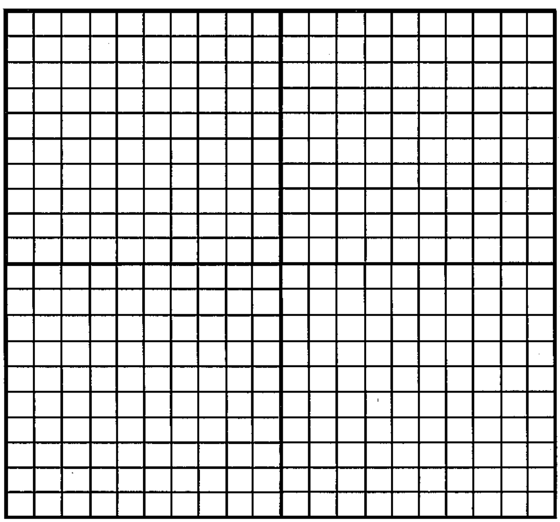
Se hace observar que si el radicando tiene una o dos cifras, la raíz cuadrada tiene una sola. ¿Por qué?

Ahora se trata de averiguar qué radicandos tienen como raíz cuadrada un número de dos cifras. Para ello, se escriben los cuadrados de números como 10, 20, 30, ..., 100 y se tiene:

$10^2 = 100$	$60^2 = 3600$
$20^2 = 400$	$70^2 = 4900$
$30^2 = 900$	$80^2 = 6400$
$40^2 = 1600$	$90^2 = 8100$
$50^2 = 2500$	$100^2 = 10000$

Por tanto, todos los números comprendidos entre el 100 y el 9999 tienen una raíz cuadrada formada por dos números enteros.

Veamos ahora la raíz cuadrada de un número no cuadrado perfecto de tres cifras, por ejemplo, 575. Como el radicando tiene tres cifras, su raíz tendrá 2, es decir, tendrá decenas y unidades. ¿Cuántas decenas? Como $400 < 575 < 900$, la raíz estará comprendida entre 20 y 30. Entonces, construimos un cuadrado de lado 20 unidades.



Lado = 20 unidades

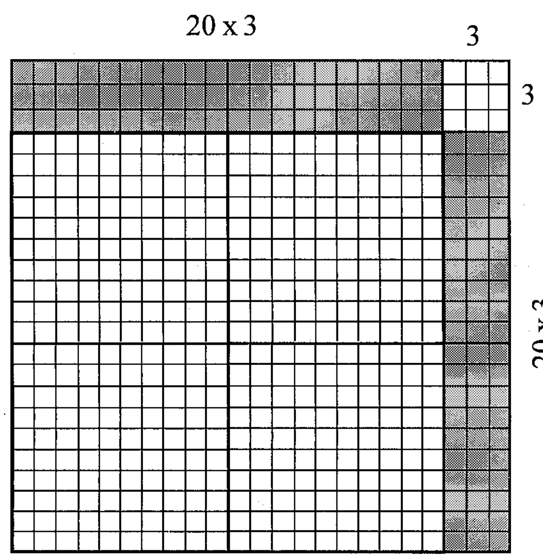
Nos sobran 175 unidades para intentar otro mayor con las unidades de la raíz. Para ello necesitamos el doble de 20 más 1, es decir, 41. Hay que saber ahora cuantos grupos de 20 se pueden añadir en cada lado del cuadrado de lado 20. Para ello dividimos las unidades que nos quedan, 175, entre el doble de 20, es decir, por el duplo de la raíz. Hemos llegado de manera natural a la parte del algoritmo de la raíz cuadrada donde el alumno tiene que multiplicar por 2 el contenido de la cajita de la raíz.

Dividimos 175 por 40 y nos quedamos con la parte entera, es decir, 4, que nos indica que con 175 unidades podríamos añadir 4 grupos de 20 en cada lado del cuadrado de lado 20, esto sin contar con el cuadrado de la esquina, para completar el cuadrado principal. En nuestro caso nos harían falta:

20x4 + 20x4 + 4x4 = 176

Pero sólo tenemos 175 unidades para completar el cuadrado principal. Esto quiere decir que no podemos añadir 4 grupos de 20; intentamos entonces con tres grupos de 20:

20x3 + 20x3 + 3x3 = 129



Añadiendo estos tres grupos de 20, nos quedan 125 - 129 = 46 unidades con las que ya no podemos formar otro cuadrado mayor, pues se necesitan el doble de 23 más 1 para construir otro mayor en una unidad.

Todo esto se puede presentar en el algoritmo "formal":

$\sqrt{575}$	**20+3**
-400	**20x2=40**
175	**175:40=4**
-129	**40x4+4x4=176**
46	**40x3+3x3=129**

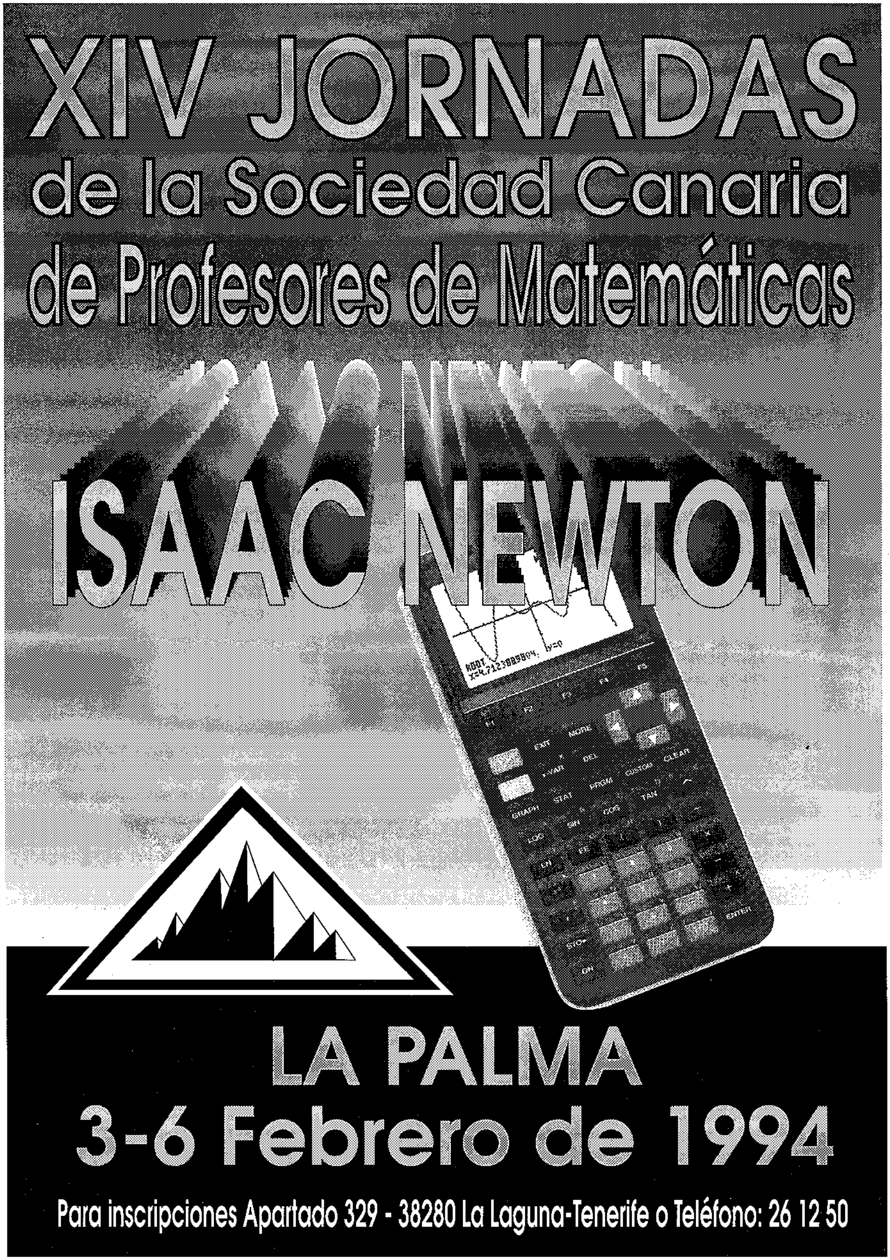
De aquí ya es inmediato pasar al algoritmo "relajado".

Es fácil ver ahora por qué hay que multiplicar por dos la caja de la raíz cuadrada. también se puede entender la parte del algoritmo relajado, donde se le dice al alumno que busque un número que, unido al duplo de la raíz parcial, de como resultado el resto parcial por defecto. La explicación es muy simple. Del algoritmo formal, y aplicando la propiedad distributiva

40x3 + 3x3 = (40 + 3)x3 = 43x3

Creo que hay que empezar explicando el algoritmo formal para que los alumnos entiendan el proceso del cálculo de la raíz cuadrada, comprendiendo lo que están haciendo y por qué lo están haciendo.

Toda esta idea está plasmada en un programa de informática que he realizado para PC, que llamo RADIGRAPH, el cual nos permite construir cuadrados cada vez mayores, hasta conseguir el mayor cuadrado posible. El programa también muestra al algoritmo formal paso a paso. Está preparado para números naturales menores que 1400 por razón de espacio en pantalla. El algoritmo es perfectamente válido para cualquier número de cifras en el radicando.


XIV JORNADAS
de la Sociedad Canaria
de Profesores de Matemáticas
ISAAC NEWTON
LA PALMA
3-6 Febrero de 1994
Para inscripciones Apartado 329 - 38280 La Laguna-Tenerife o Teléfono: 26 12 50