¿GEOMETRÍA O GEOMETRÍAS?

José Salvador

INTRODUCCIÓN

Interesado por el tema de la Historia de las matemáticas, me he dado cuenta de que ésta ofrece una gran variedad de recursos para despertar el interés de los alumnos por las matemáticas, ya que éstos suelen sentir curiosidad por las anécdotas históricas y, como todos los conocimientos matemáticos tienen una parte histórica muy interesante, he creído ver en la historia una herramienta de ayuda a la hora de explicar los conocimientos matemáticos que tan abstractos suelen resultar. En este caso concreto el tema de estudio es la geometría, y el principal objetivo que persigo es que el alumno se de cuenta de la visión tan limitada que tiene de esta materia, ya que todos los conocimientos que se le han explicado son de geometría euclídea; hacerle ver que existen otros tipos diferentes de geometrías con sus propiedades características, totalmente diferentes de las de la geometría euclídea. Por supuesto, al intentar explicar estas nuevas ideas desde una visión histórica, el alumno aprende a su vez historia de las matemáticas y, más aún, se da cuenta de que todos los conocimientos matemáticos, por simples que parezcan, han tenido un desarrollo muy lento y difícil, no por ello dejando de ser muy interesantes.

GEOMETRÍA O GEOMETRÍAS

Si nos preguntaran qué nos sugiere la palabra geometría, automáticamente nos vendrían una serie de ideas a nuestra cabeza, a unos más que a otros, pero todos

INSTITUTO DE BACHILLERATO VIERA Y CLAVIJO (LA LAGUNA)

conocemos cosas relacionadas con la geometría. Por ejemplo, pensaríamos en un punto, una recta, una circunferencia, un triángulo, determinadas figuras, e incluso algunos podrían dar relaciones, fórmulas o teoremas que cumplen determinadas figuras geométricas; en fin, conocimientos que hemos ido adquiriendo durante nuestros estudios. Muchos se atreverían a dar definiciones respondiendo a preguntas como:

¿Qué es una línea recta?

¿Qué son rectas paralelas?

¿Cuántas paralelas se pueden trazar por un punto exterior a una recta?

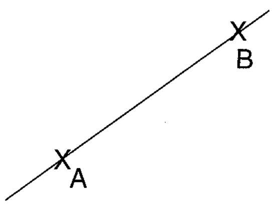
Y generalmente las respuestas a estas preguntas serían:

Una recta es la línea que da la distancia más corta entre dos puntos.

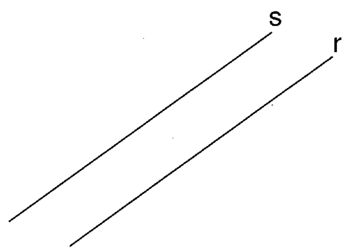
Dos rectas paralelas son dos rectas que nunca se cortan.

Por un punto exterior a una recta sólo se puede trazar una paralela a ella.

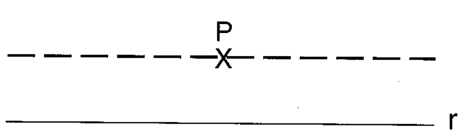
Sin entrar en la discusión de si estas definiciones o explicaciones están o no bien hechas, seguro que las ideas que todos tenemos de estos conceptos son las que aparecen representadas en los siguientes dibujos (figura 1):



a) Línea recta



b) Rectas paralelas



c) Recta paralela a r por un punto P exterior

Figura 1

Pero, ¿es esto siempre así?, es decir, ¿nos atreveríamos a generalizar y a afirmar que estas ideas que nosotros tenemos y con las que hemos estado trabajando durante todos nuestros estudios son siempre correctas?, o dicho de otro modo, ¿estamos seguros que en cualquier situación la línea que da la distancia más corta entre dos puntos es una recta, que dos rectas paralelas son dos rectas que nunca se cortan, y que por un punto exterior a una recta sólo se puede trazar una paralela? En definitiva, ¿somos capaces de imaginar alguna situación en la que la línea que da la distancia mínima entre dos puntos no sea una recta o que todas las rectas se corten, y por tanto no existan rectas paralelas? Ante esta situación, la mayor parte de nosotros, que tan acostumbrados estamos a generalizar en nuestra vida cotidiana, haciendo afirmaciones como:

Todos los políticos son unos vividores, todos los alemanes son unos nazis, etc., diríamos sin pensarlo dos veces: "pues si, la línea que da la distancia más corta entre dos puntos es siempre una línea recta, y, desde luego, por un punto exterior a una recta sólo se puede trazar una recta paralela siempre". No nos paramos a pensar en este caso lo difícil que es generalizar una idea, ya que como encontremos un ejemplo en el que esto no se cumpla, nuestra afirmación se nos vendría abajo. Durante siglos, observando que todos los cisnes eran blancos se llegó a afirmar que todos los cisnes eran blancos, y se creía en esto como una verdad. No era posible imaginar un cisne de otro color, hasta que se vio por primera vez un cisne negro en Australia y esta idea se derrumbó. Lo que quiero decir es que la generalización como una verdad, sólo es posible en el campo de la matemática, como deducción lógica de otras verdades (AXIOMAS) (que en el caso que nos ocupa resultan evidentes). Por lo tanto, si los mecanismos de deducción lógica están bien empleados, una falsedad en la generalización de un concepto, supondría una falsedad en esas verdades más sencillas.

Intentaremos estudiar la verdad o falsedad de nuestras afirmaciones, hechas no como deducción lógica, porque nuestra intuición e imaginación no admite la posibilidad de que esto no sea así.

Para ello haremos un repaso de la Historia de las Matemáticas y veremos que estas dudas que nos planteamos ahora se las plantearon ya en su día muchos matemáticos importantes, y del estudio de las mismas, del intento de explicación razonable, surgieron nuevos conocimientos que enriquecieron mucho las matemáticas y la visión que el hombre tiene del Universo.

HISTORIA DEL V POSTULADO

La Geometría que estudiamos en E.G.B. y Bachillerato se conoce como **geometría Euclídea**, porque es la que aparece desarrollada en uno de los libros más importantes de la Matemática, "Los elementos" de Euclides. De ahí el nombre de Euclídea.

Euclides era un buen matemático, pero sobre todo podríamos decir que fue el primer profesor de matemáticas, entendiendo que le interesaba más el aspecto divulgativo de los conocimientos matemáticos que la pura investigación matemática en sí. Vivió en el siglo III a.C. y dio clases de matemática en la Universidad de Alejandría. Por esos años la Matemática difería mucho de lo que es hoy, ya que el gran desarrollo de la Matemática se produce a partir del siglo XVII.

En Grecia lo que tuvo un extraordinario desarrollo fue la Geometría y muchos matemáticos griegos estudiaron con profundidad esta materia, algunos de ellos incluso más importantes que Euclides.

El paso de Euclides a la Historia se debe, principalmente, a que fue el que recopiló todos los conocimientos de Geometría existentes hasta su época y los formalizó, es decir, construyó una teoría en la que todos estos conocimientos iban surgiendo por deducción lógica a partir de unas condiciones iniciales que él impuso.

Primero empezó por dar un conjunto de definiciones; algunas son:

- Punto es lo que no tiene partes.

- Línea es la longitud sin anchura.

- Los extremos de la línea son puntos.

- Línea recta es la que yace por igual sobre sus puntos.

- Si una recta trazada sobre otra, forma con ella dos ángulos contiguos iguales, cada uno de ellos es recto, y la recta se llama perpendicular a la que se trazó.

- Círculo es una figura plana limitada por una sola línea que se llama periferia, respecto a la cual son iguales las rectas que inciden sobre ella trazadas desde uno de los puntos situados en el interior de la figura. Este punto se llama centro del círculo.

- Rectas paralelas son las que, estando en el mismo plano y prolongadas hasta el infinito, no se encuentran.

Después impuso unos postulados, axiomas o verdades que se cumplen siempre y que en esa época se pensaba debían ser evidentes; los famosos cinco postulados son:

- P1. Por dos puntos distintos pasa una única recta.

- P2. Un segmento rectilíneo puede ser siempre prolongado.

- P3. Hay una única circunferencia con un centro y un diámetro dados.

- P4. Todos los ángulos retos son iguales.

- P5. Si una secante corta a dos rectas formando a un lado ángulos interiores cuya suma es menor que dos rectos, las dos rectas suficientemente prolongadas se cortan en ese mismo lado.

Después, a partir de estas condiciones iniciales, Euclides fue deduciendo otras verdades menos evidentes (teoremas, proposiciones, etc.).

De todos estos postulados vamos a centrar nuestra atención en el V, porque es el que nos lleva al tema, centro de nuestro estudio.

Algunos matemáticos posteriores a Euclides al encontrarse con este postulado pensaron que no era nada evidente, como los demás, e intentaron demostrarlo a partir de los otros cuatro. Esta situación, en cierto modo, es la misma que la que nos hemos planteado, porque parece evidente (figura 2) que si una recta corta a otras dos formando ángulos interiores cuya suma es menor que dos rectos, (180º) estas rectas se han de cortar; gráficamente esta situación sería la siguiente:

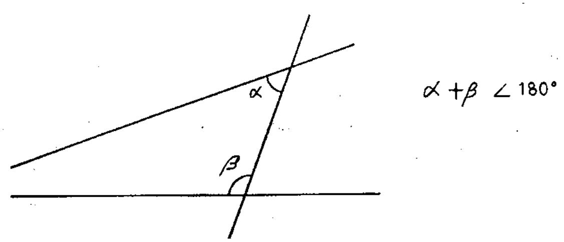


Figura 2

o lo que es lo mismo, si $\alpha+\beta = 180° \Rightarrow r // s$, y lo más posible es que nos atrevamos a generalizar también esa propiedad. Sin embargo, muchos matemáticos intentaron demostrar este postulado; porque, entre otras razones, sabían de la existencia de líneas que, sin llegar a cortarse nunca, se aproximan una a la otra tanto como se quiera. Esto es lo que sucede, por ejemplo, con las asíntotas de una hipérbola (figura 3)

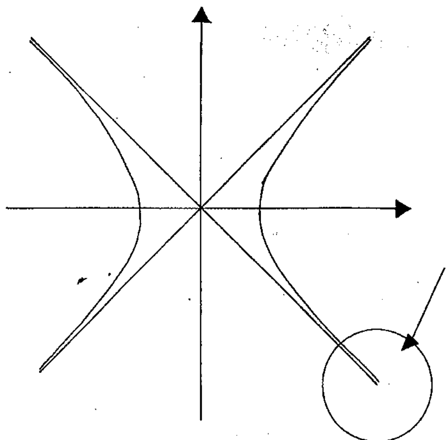


Figura 3

Si aumentásemos considerablemente la escala de esta representación (figura 4) nos encontramos con la siguiente situación:

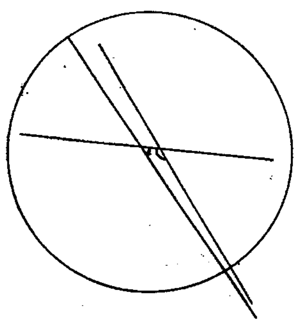


Figura 4

Los ángulos interiores suman menos de 180° y las dos líneas no se cortan nunca.

Alguno de nosotros podríamos decir que este caso no nos vale para el estudio de nuestro postulado, porque no son dos rectas, que es a lo que se refiere el postulado. De acuerdo, pero es una situación que por lo menos nos hace pensar y dudar de la veracidad del postulado.

Es por esto, como hemos dicho, que intentaron demostrar el V postulado a partir de los otros cuatro, ya que como los otros cuatro eran evidentes, el V quedaría probado como cierto por deducción lógica de los primeros cuatro. Entre los matemáticos que buscaron esta demostración se encuentran: Gerolano Sacheri(1667-1733), un Jesuita profesor de la Universidad de Pavía; Lambert (1752-1833), matemático francés, etc.

Estudiemos el intento de demostración de SACHERI.

Sacheri parte de un cuadrilátero con dos ángulos rectos, cuyos lados opuestos AB y CD son iguales y perpendiculares al tercer lado BC, y admitía 3 posibilidades:

a) Los ángulos A y D son obtusos. (Hipótesis del ángulo obtuso).

b) Los ángulos son rectos. (Hipótesis del ángulo recto).

c) Estos ángulos son agudos. (Hipótesis del ángulo agudo).

Para que tengamos una idea de lo que quería hacer, Sacheri estaba convencido de que la opción correcta era la b), (como seguro nos sucede a nosotros), ¡es que es tan evidente! diríamos ante esta situación, pero sentía la necesidad de demostrarlo, como buen matemático que era.

La primera hipótesis la rechazó como absurda porque, de ser cierta, conduciría a que el segmento AD sería de longitud infinita.

Por lo tanto ya solo le quedaba por demostrar como falsa la opción c) y quedaría probada como verdadera la segunda, que sería lo mismo que afirmar que si una recta corta a otras dos con ángulos interiores cuya suma es 180° estas rectas son paralelas, y este es el V postulado de Euclides.

Cual sería su sorpresa al darse cuenta de que al intentar encontrar un absurdo(*) aceptando como co-

* *Salcheri utilizaba la demostración por reducción al absurdo, que consiste en suponer como cierto algo que se quiere demostrar como falso, para llegar a una contradicción, a un absurdo o algo que no tiene sentido.*

rrecta la hipótesis del ángulo agudo, éste nunca llegaba; por el contrario, fue deduciendo en la búsqueda de ese absurdo teorema tras teorema hasta 30, sin que ninguno de ellos le condujera a una contradicción o a un absurdo.

Viendo esta situación y ante la imposibilidad de dar una demostración del V postulado, afirmó (abandonando con ello el rigor matemático y refugiándeose más en la fe:

"la hipótesis correcta es la b) y la c) es falsa, porque repugna a la naturaleza de la línea recta".

Tan convencido estaba Sacheri de la evidencia del V postulado, que no dio ningún valor a los teoremas o resultados que consiguió al aceptar como verdadera la hipótesis del ángulo agudo. Pero otros matemáticos, ya en el siglo XIX, sí aceptaron la hipótesis del ángulo agudo como buena, y por tanto, que aunque la suma de los ángulos interiores fuese menor que dos rectos, estas rectas no tenían por qué cortarse.

Estos matemáticos fueron: Gauss, matemático alemán considerado por algunos el más grande de todos los matemáticos, pero que no llegó a publicar nada sobre este tema; Lobacheskii, matemático ruso, que publicó en 1826 por primera vez una geometría distinta de la de Euclides (no-Euclídea) **basada en la hipótesis del ángulo agudo**; Bolyai, matemático húngaro que publicó en 1832 también una geometría en la que se aceptaba esta hipótesis del ángulo agudo.

En esta geometría no euclídea podemos hacer afirmaciones como ésta: Dos rectas paralelas cortadas por otra recta (figura 5) forman a un lado ángulos interiores cuya suma es menor que dos rectos.

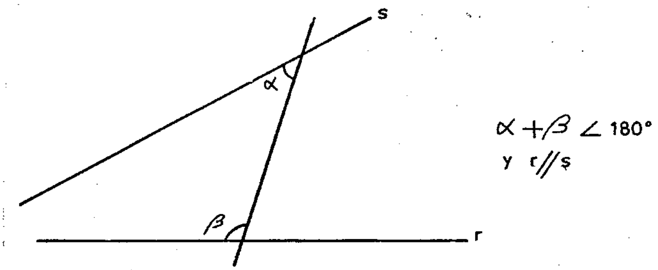
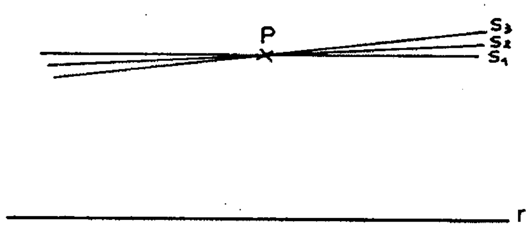


Figura 5

Por lo tanto, dada una recta r y un punto P exterior a la misma (figura 6) se pueden trazar por P infinitas paralelas a r.



$r // s_1, r // s_2, r // s_3, \ldots\ldots$

Figura 6

Esta geometría no euclídea recibe el nombre de **geometría hiperbólica**.

Más tarde hacia 1865 un matemático alemán, Riemann, desarrolló otra geometría distinta basada en la hipótesis del ángulo obtuso de Sacheri, geometría que recibe el nombre de **geometría elíptica**.

En principio todo iba bien teóricamente, es decir, se desarrollaron las teorías de esas geometrías; pero eran tan abstractas, tan difíciles de entender, que gran parte del mundo científico desconfiaba de ellas pensando que, transcurridos los años, se descubriría el error, la contradicción; vamos, que estas geometrías contra natura, como diría Sacheri, se caerían por su propio peso.

Con el fin de tratar de entender esta nueva forma de ver las cosas, intentemos profundizar un poco más en estas geometrías estudiando alguna de sus propiedades.

GEOMETRÍA HIPERBÓLICA

En esta geometría, la suma de los ángulos de un triángulo es menor que 180°; existe, por tanto, una mayor variedad de figuras que en la geometría euclídea. Así, por ejemplo, existen triángulos equiláteros (con los tres lados iguales) cuyos ángulos valen todos 45°, 36°, etc.

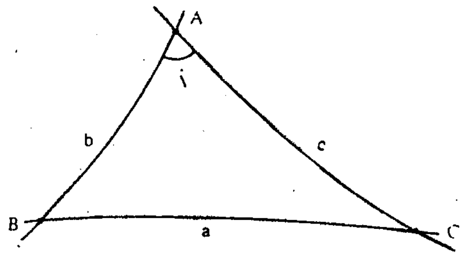


Figura 7

Otras características:

. No existen semejanzas: dos triángulos con sus tres ángulos iguales son superponibles.

. Por un punto exterior a una recta se pueden trazar infinitas paralelas.

. Las líneas que dan la distancia mínima entre dos puntos no son las rectas.

GEOMETRÍA ELÍPTICA

En esta geometría la suma de los ángulos de un triángulo es mayor que 180°.

. No existen rectas paralelas. Por un punto exterior a una recta no se puede trazar paralela alguna.

. Las líneas que dan la mínima distancia entre dos puntos no son las rectas.

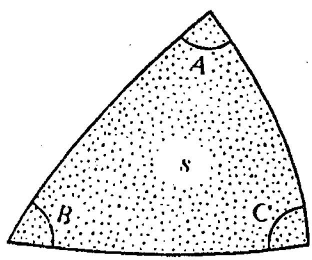


Figura 8

GEOMETRÍA EUCLÍDEA

Como es sabido, en esta geometría la suma de los ángulos de un triángulo es 180°.

. Por un punto exterior a una recta sólo se puede trazar una paralela.

. La línea que da la distancia mínima entre dos puntos es la recta.

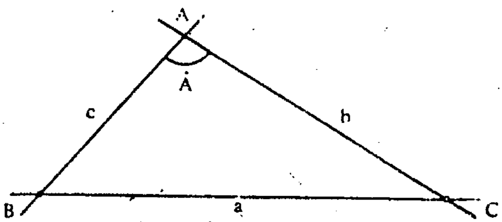


Figura 9

Creo que queda en evidencia por qué estas geometrías no euclídeas, que teóricamente estaban bien construidas, no eran aceptadas, y mucho menos pensaban que tenía que existir algún fallo en el desarrollo teórico.

Se hacía necesario un soporte físico, es decir, un modelo real de unas superficies en las que funcionaran estas geometrías.

Intentando dar respuesta a esta necesidad, el matemático italiano E. Bertrami(1868) dio ejemplos de superficies reales que tienen ese tipo de geometrías; en concreto, dio un modelo para la geometría hiperbólica. Bertrani demostró que en un tipo de superficies, denominadas superficies de curvatura negativa constante, la mínima distancia entre dos puntos no viene dada por una recta; es más, no existen rectas en esas superficies, esta distancia viene dada por unas curvas que se llaman **curvas geodésicas**. Toda la geometría hiperbólica puede ser interpretada sobre una de estas superficies.

Ejemplos de superficies con geometría hiperbólica.

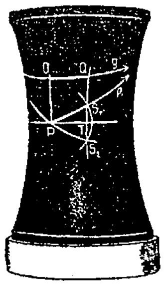


Figura 10

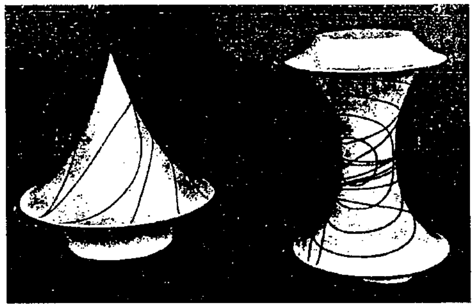


Figura 11

Por otro lado, Riemann había dado un modelo real para la geometría elíptica: la esfera. Sobre esta superficie no hay rectas y las definiciones de la geometría euclídea no son válidas. Estudiemos más profundamente esta geometría.

ESFERA

Hemos dicho que en la esfera las definiciones geométricas son distintas; así por ejemplo (figura 12):

PUNTO = par de puntos diametralmente opuestos sobre la esfera.

RECTA = circunferencia máxima que tiene su centro en el centro de la esfera.

En esta geometría no existen paralelas, ya que todas las rectas se cortan en un punto (es decir, en dos puntos diametralmente opuestos).

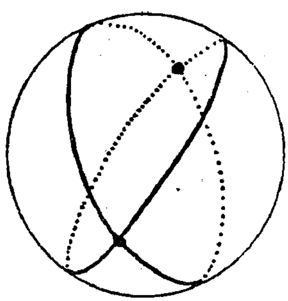


Figura 12

En la figura 12 se puede ver una esfera en la que se comprueba cómo dos rectas cualesquiera se cortan en un punto. No existen rectas paralelas.

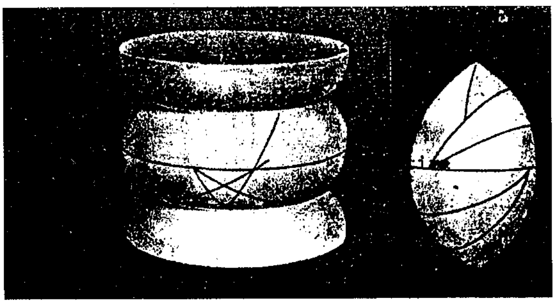


Figura 13

La figura 13 muestra superficies con curvatura constante positiva y geometría Elíptica.

Por último hay que destacar algo muy importante y es que estas superficies con geometrías globales no-euclídeas, localmente tienen una geometría euclídea. Esto es lo que nos sucede a nosotros: vivimos en un espacio euclídeo, pero si consideramos globalmente todo el planeta, su geometría es no-euclídea (esférica). Por lo tanto, las geometrías no-euclídeas y euclídea están estrechamente relacionadas, y una contradicción en una de ellas supondría automáticamente una contradicción en la geometría euclídea.

CONCLUSIONES

Hemos visto tres tipos de geometrías: euclídea, hiperbólica y elíptica; pero realmente existirán tantas geometrías diferentes como clases distintas de superficies curvas existen, y solo para un número reducidísimo de ellas es válido el V postulado de paralelismo. En sí, todas las geometrías tienen la misma legitimidad que la euclídea, y el hecho de que se hable tan poco de ellas ha de atribuirse a que - si prescindimos de la geometría sobre la esfera - no existe ningún motivo para que en nuestro universo nos ocupemos de las formas no euclídeas de la Geometría. Las superficies curvas pueden considerarse siempre "embutidas" en un espacio euclídeo, lo que da lugar a que no exista ningún motivo directo para constituir una geometría no-euclídea de la superficie curva que consideremos.

Por lo tanto, no es que estemos equivocados en nuestras ideas iniciales de la recta y rectas paralelas, sino que estas ideas son validas en la geometría euclídea, que es la que conocemos y estudiamos, pero no nos aventuremos a generalizar si no queremos caer en errores como los que hemos visto.

El espacio es relativo, depende de la visión que tengamos de él. Por lo tanto, las nociones de geometría, como dependen del espacio considerado, también son relativas. Así por ejemplo, una pelota de golf vista a una distancia considerable es un punto, si la acercamos este punto se convierte en una esfera y si tomamos un tamaño microscópico y nos situamos sobre ella, entonces nos parecerá un inmenso plano.