

¿SON LOS SIETE LADOS IGUALES?

Jorge Fernández Herce
Mercedes González Menorca

Hacemos un análisis de las construcciones de polígonos regulares que aprendemos en dibujo, centrándonos en la construcción del heptágono regular dado el radio tal y como la podría efectuar un alumno de 3º de BUP como aplicación práctica de sus conocimientos de trigonometría. Ésta, siendo aproximada, tiene tal grado de precisión que no cabe, a efectos prácticos, de calificarla como tal.

I.- Introducción

Entre los «grandes problemas de la geometría de siempre», podríamos citar tal vez La cuadratura del círculo, La trisección del ángulo o La duplicación del cubo, todos ellos gravitan sobre la necesidad, imposible por cierto, de la realización mediante construcciones geométricas con regla y compás. La regla¹ y el compás son los dos instrumentos geométricos por excelencia e históricamente han sido claves en el desarrollo del saber y la ciencia. Hoy en día, dentro de la matemática han dejado totalmente de existir y han pasado a campos como el Dibujo geométrico o la Geometría descriptiva. Pero detrás de ellos hay todo un mundo de matemáticas fascinante.

Precisamente algo que sigue teniendo mucho que ver tanto con las construcciones con regla y compás como con la enseñanza (tristemente sólo con la del Dibujo) es la construcción de polígonos regulares. Es una

¹ La regla no graduada, el instrumento simple y llano para trazar una línea recta.

cuestión clásica en nuestros institutos que los alumnos «aprendan» a construir los polígonos regulares de cualquier número de lados partiendo del radio de la circunferencia en la que se inscriben o partiendo del lado de dicho polígono. Más aún se les alecciona en procedimientos particulares que suelen cubrir desde el triángulo (equilátero) hasta el octógono. Todo esto, por supuesto, sin que los muchachos puedan sospechar que, en la mayor parte de los casos se les está «engañando» y que lo que hacen es una aproximación al problema que, sin lugar a dudas, tienen un margen de error muy aceptable.

Es bien sabido que así como los tres problemas clásicos anteriormente citados son irresolubles, la mayor parte de los polígonos regulares no son factibles de construir con regla y compás, es decir, no hay un método exacto de construcción y cualquier estrategia que se dé llegará a una solución aproximada. No entraremos en la justificación ni desarrollo de esta afirmación y vamos a centrarnos en las construcciones particulares que se enseñan al alumno de los polígonos regulares desde 3 a 7 lados, partiendo del radio de la circunferencia en la que se inscriben:

CONSTRUCCIONES PARTICULARES DE POLÍGONOS REGULARES DADO EL RADIO

Triángulo	Exacta
Cuadrado	Exacta
Pentágono	Exacta
Exágono	Exacta
Heptágono	Aproximada
Octógono	Exacta

Sin mucha dificultad, por lo que no vamos a detallar, resulta evidente comprender que las construcciones del triángulo y del cuadrado son exactas porque se basan en la construcción del un ángulo de 60° y un ángulo de 90° respectivamente.

El exágono y el octógono resultan de dividir en dos partes iguales cada ángulo central del triángulo y el cuadrado respectivamente y, el trazado de la bisectriz también es sobradamente conocido.

Para el pentágono remitimos a cualquier lector al nº5 de la revista SUMA en la que, dentro del artículo, «La sección áurea y la construcción de polígonos regulares», se aborda este problema entre otros.

Analicemos entonces la «construcción del heptágono regular dado el radio», haciendo un análisis numérico de la misma y estimando la fiabilidad y grado de error que cualquier alumno de 3º de BUP puede abordar con los conocimientos trigonométricos que posee:

II. Analizando el heptágono:

II-1.: Si suponemos un heptágono regular inscrito en una circunferencia de radio «r», resulta evidente que:

A.- Cada ángulo central medirá:

$$\alpha = 360^\circ : 7 = 51^\circ 42' 57''.$$

B.- Cada lado, aplicando algo tan conocido como el teorema del coseno será:

$$L^2 = r^2 + r^2 - 2 \cdot r \cdot r \cdot \cos(\alpha)$$

Con unas simples operaciones resulta que:

$$L = 0'8677675 \cdot r$$

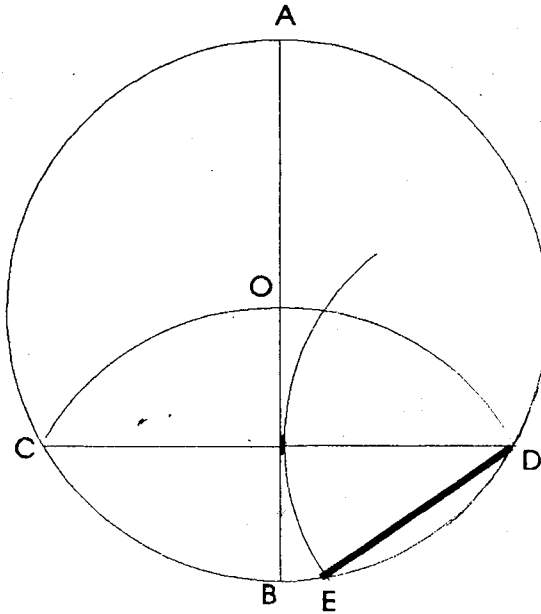
II-2.: Comentemos ahora la construcción empezando por describirla:

A.- Dada la circunferencia de centro O y radio «r»:

i) Trazamos un diámetro AB

ii) Con centro en B y radio «r» trazamos el arco CD.

iii) La mitad de la cuerda CD, es precisamente la «aproximación» al lado del heptágono. Que con centro en D se traslada a la circunferencia.



B.- Analizando ahora el proceso cuantitativamente tenemos que:

- i) El diámetro AB mide $2 \cdot r$
- ii) El triángulo ODB es equilátero, luego cada ángulo tiene 60° y cada lado mide «r».
- iii) La mitad de la cuerda CD es la altura del triángulo equilátero ODB y, por tanto mide: $\sqrt{3} \cdot r/2$.

En consecuencia, sacando algún que otro decimal se obtiene que el lado estimado del heptágono es:

$$K = 0,8660254 \cdot r$$

Del mismo modo, aplicando el teorema del coseno al triángulo ODE que

es isósceles porque sus lados OE y ED son «r», tenemos que el ángulo central del heptágono construido responde a:

$$K^2 = r^2 + r^2 - 2 \cdot r \cdot r \cdot \text{Cos}(\beta)$$

$$\text{Cos}(\beta) = 0'625$$

$$\beta = 51'31781^\circ$$

II-3.: Constatación y análisis de diferencias:

ELEMENTO	HEPTÁGONO REGULAR	HEPTÁGONO CONSTRUIDO
Lado	0'8677675•r	0'8660254•r
Ángulo central	51'42857°	51'31781°

Una simple mirada a la tabla anterior nos da una idea de la exactitud que esta construcción aproximada tiene. Pero detallemos aún más esta cuestión aportando algunos datos reales. Para ello vamos a suponer unos datos que podrían responder a un ejercicio practico muy razonable:

- Tomaremos como radio de la circunferencia 5 cm.
- Consideraremos que disponemos de compás y lápiz en los que el trazo no sea mayor de 0'4mm. de grosor.

En estas condiciones la diferencia entre el lado del heptágono regular y del construido sería de 0'087 mm. Teniendo en cuenta que el grosor del trazo es de 0'4 mm. y las desviaciones mínimas que se cometen al pinchar con el compás o al situar la regla, se entiende que el margen de error por la imprecisión propia del material es, fácilmente, 50 veces mayor que la inexactitud que el proceso en sí mismo conlleva.

Es pues perfectamente justificable que en algunos de los libros en los que se describan estas construcciones, recomienden exactamente la misma prudencia en el proceso para el pentágono que para el heptágono

siendo que el primero es un procedimiento exacto y el segundo aproximado. En el momento que el proceso de construcción conlleva varios pasos, el error que por imprecisiones al pinchar o abrir con el compás así como al colocar la regla o el lápiz sobre ella, son precisamente los que derivan en un resultado menos exitoso, siendo totalmente despreciable el margen de error del procedimiento en sí mismo.

Sirva para afianzar más si cabe estas afirmaciones el hecho de que, la diferencia que el ángulo central obtenido en el proceso de construcción arrastraría en condiciones ideales, nos determinaría que el heptágono no quedaría cerrado por un defecto de 0'1 mm.

BIBLIOGRAFÍA:

- [1] BARNECHEA, Emilio y REQUENA, Rafael. «Dibujo 1º BUP». Ed. Edelvives. Zaragoza 1978.
- [2] BERNAL ORDUÑA, J. y MARTINEZ RODRIGUEZ, A. «Dibujo 1». Ediciones S.M. Madrid 1976.
- [3] PUIG ADAM, P. «Curso de Geometría Métrica». Euler Editorial S.A. Madrid 1986.
- [4] ROANES MACIAS, Eugenio. «Introducción a la Geometría». Ed. Anaya. Madrid 1980.
- [5] Revista SUMA nº 5 (pags: 53-58). 1990
HORTELANO MARTINEZ, Luis. «La sección áurea y la construcción de polígonos regulares»