EL USO DE SISTEMAS DE REPRESENTACIÓN NO VERBALES EN PROBLEMAS ARITMÉTICOS EN EL D.C.B. DE PRIMARIA

A. Noda, J. Hernández, M. M. Socas

INTRODUCCIÓN:

El objetivo de este trabajo es presentar un modelo de competencias para resolver problemas aritméticos verbales, que usa un sistema de representación no verbal yuxtapuesto al sistema de representación aritmético.

Este modelo, como justificaremos, posibilita el desarrollo de los procedimientos requeridos en la resolución de problemas según el D.C.B. de Matemáticas de Primaria y favorece en los alumnos el desarrollo de diferentes habilidades.

El artículo lo dividimos en cuatro apartados. En el primero hacemos una recopilación de las sugerencias más importantes hechas en el D.C.B. sobre resolución de problemas y un análisis de como se desarrolla la instrucción de los mismos en el aula. A partir de un estudio sobre las dificultades detectadas en la resolución, planteamos el modelo de competencias en el apartado 2. Un tercer apartado se dedica a explicar el sistema de representación usado, comentando algunas experiencias realizadas con el mismo. Terminamos con una comparación sobre las aportaciones que el uso de los dos sistemas (visual-geométrico y aritmético) y el modelo de competencias añaden a la resolución de problemas.

LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS EN EL D.C.B. Y LA INSTRUCCIÓN EN EL AULA:

"La resolución de problemas dentro del currículo de Matemáticas es un contenido prioritario, porque es un medio de aprendizaje y refuerzo de contenidos, da sentido aplicativo al área y permite la interrelación entre los distintos bloques y las restantes áreas" (D.C.B., 1989).

La cita anterior expresa con claridad la importancia que el D.C.B. da a la resolución de problemas, aspecto que enfatiza igualmente el D.C.B. de Canarias (1991). Este hincapié que parte de la década de los 80 (NCTM, 1980) sigue vigente actualmente y cada día son más los educadores que lo asumen plenamente.

La resolución de problemas, como afirma el D.C.B., es el método más conveniente de aprender Matemáticas; es la aplicación de las Matemáticas a diversas situaciones y favorece el desarrollo y la adquisición de capacidades cognitivas generales.

Ahora bien, la resolución de problemas se ha mostrado siempre como el tópico de mayor dificultad para los alumnos. Esta dificultad puede tener algo inherente a su propia complejidad, pero muchas veces ha sido el resultado de unos planteamientos metodológicos inadecuados junto a una falta de motivación.

Múltiples son las sugerencias que aporta el D.C.B., de las cuales destacamos:

"En los planteamientos metodológicos se ha de tener en cuenta que el alumno debe desarrollar y perfeccionar sus propias estrategias, a la vez que adquiere otras generales y específicas que le permiten enfrentarse a las nuevas situaciones con probabilidad de éxito. En este sentido se brindará a los niños la oportunidad de familiarizarse con procesos que facilitan la exploración y resolución de problemas como: comprensión y expresión de la situación matemática (verbalización, dramatización, discusión en equipo), extracción de datos y análisis de los mismos, representación en forma gráfica del problema o situación, formulación de conjeturas y verificación de su validez o no, exploración mediante ensayo y error, formulaciones nuevas del problema, comprobación de resultados y comunicación de los mismos. Se hace necesario, asimismo,

desarrollar la capacidad de persistir en la exploración de un problema" (D.C.B., 1989).

El propio diseño hace un análisis sobre la resolución de problemas, que podíamos resumir en dos apartados: Dificultades de los alumnos y sugerencias metodológicas.

La resolución de problemas plantea dos tipos de dificultades: aquellas relacionadas con dificultades de comprensión del lenguaje escrito, que no tienen que ver con aspectos o conceptos matemáticos, y las relacionadas con la falta del dominio funcional de algunos contenidos de procedimientos, tales como el uso de diferentes lenguajes, destrezas básicas de cálculo mental, de conteo, algoritmos de cálculo, uso razonado de la calculadora, estimación, medidas,..., y el desarrollo de procedimientos o estrategias generales a las que con frecuencia, no se les presta la atención que merecen (D.C.B. de Canarias, 1991).

En cuanto a su planificación recomienda que se elabore basándose en los procedimientos que es preciso utilizar para resolverlos, teniendo en cuenta que deben contemplarse al menos los siguientes:

- ✓Los que se refieren a la utilización de distintos sistemas de representación (verbal, numérico, gráfico, visual, físico, etc.).
- ✓Los que se refieren al uso de diferentes algoritmos y destrezas prácticas.
- ✓Los que se refieren al desarrollo de distintas estrategias de razonamientos, heurísticos, etc., en diferentes contextos.

La representación matemática de una situación debe hacerse utilizando sucesivamente diferentes lenguajes (verbal, gráfico y numérico) y estableciendo correspondencias entre los mismos.

Igualmente, parece indicado favorecer el desarrollo de estrategias personales de resolución y de organización de los datos necesarios del problema, como puede ser su representación mediante objetos o de forma gráfica. En este sentido, es conveniente que el alumnado exprese oralmente las decisiones que ha ido tomando en cada momento.

Todas estas reflexiones hechas para los problemas matemáticos en general, son válidas para los problemas aritméticos verbales que son el objeto de nuestro estudio.

Sin embargo, si observamos el tratamiento que los problemas reciben tanto en la instrucción del profesor como en los libros de textos nos encontramos que el modelo de competencias para los problemas verbales aritméticos es, en general, como sigue:

Representación Verbal $\xleftrightarrow{\textbf{Traducción}}$ **Representación Numérica** $\longleftrightarrow$ **Solución**

y el modelo de implementación suele seguir un esquema similar a:

Ejemplos (Prototipos) $\xleftrightarrow{\textbf{Imitación}}$ $\left\{ \begin{array}{c} \textbf{Representación numérica} \\ \updownarrow \\ \textbf{Solución} \end{array} \right.$

Juan tiene en su colección 91 sellos y Ángel en la suya 27 sellos menos. ¿Cuántos sellos tiene Ángel?	$\begin{array}{r} 91 \\ -27 \\ \hline 64 \end{array}$	Ángel tiene 64 sellos

que no fomenta, claramente, ninguna de las indicaciones anteriormente señaladas.

De esta forma la resolución de problemas se convierte, como afirman muchos alumnos, "en una actividad mecánica, donde el objetivo es elegir y ejecutar cálculos aburridos".

Por otra parte, los tipos de problemas que se presentan a los alumnos son totalmente similares.

Estos problemas han sido ampliamente investigados, estableciéndose sobre ellos diferentes clasificaciones atendiendo a las categorías semánticas (Carpenter y Moser, (1983) para los problemas de estructura aditiva y Peled y Nesher (1988) para los de estructura multiplicativa). Se ha demostrado que la categoría semántica constituye una variable que determina la dificultad de los mismos. Sin embargo, encontramos que ni siquiera se contemplan ejemplos de todas las categorías. Hernández y

Socas (1996) encuentran al estudiar el tipo de problemas que aparecen en los libros de texto de una editorial que para la suma los problemas que más se repiten son los de la categoría combinar, para la resta los de cambio, para los de multiplicar los de razón y para dividir los de reparto y agrupamiento, tanto si son de una o más operaciones, existiendo categorías como igualar en la suma o producto cartesiano en la multiplicación y división que ni siquiera aparecen.

Comparando la enseñanza actual de la resolución de problemas con los aspectos requeridos por el D.C.B. de Matemáticas, vemos que estos sugieren algo más que el modelo de competencias al uso, que la estrategia de enseñanza sugerida y que los tipos de problemas planteados.

PROPUESTA DE UN MODELO DE COMPETENCIA

En un trabajo previo (Socas y otros, 1985) sobre resolución de problemas verbales se detectaron como principales dificultades que presentan los escolares las siguientes:

❶ Falta de comprensión en el enunciado del problema:
- Porque los alumnos no poseen comprensión lectora.
- Porque el vocabulario utilizado no es dominado por el alumno.
- Porque las situaciones planteadas no son familiares a los niños.
- Porque no diferencian lo que conocen (datos que le dan) de lo que buscan (datos que le piden).

❷ Dificultad para reconocer la estrategia a seguir (operaciones que hay que realizar), es decir, no saben elegir el camino adecuado.
❸ Errores en la ejecución de los algoritmos clásicos.
❹ Dificultad para captar el orden en que hay que realizar las operaciones, aunque en la mayoría de los casos el alumno sabe hacer operaciones sencillas.
❺ El no plantearse si la situación obtenida es o no correcta con la información recibida.

El objeto de este trabajo es presentar una posible respuesta en la dirección que se solicita en el D.C.B. y que ayude a superar las dificultades detectadas en los alumnos. Para ello presentamos un modelo de competencia para resolver problemas verbales aritméticos dirigido a los alumnos de Educación Primaria, basado en la utilización de dos sistemas de representación yuxtapuestos: un sistema de representación gráfico (visual-geométrico) y el sistema de notación formal aritmético, que, además, tiene en cuenta las diferentes estructuras semánticas de los problemas aritméticos.

El modelo está inspirado en el modelo de Polya (1945), al que se le han añadido otros aspectos teniendo en cuenta los sistemas de representación de Goldin (1987).

El modelo general de Polya señala como estrategia general de resolución los cuatro pasos siguientes:

1. *Comprender el problema.*
2. *Concebir un plan.*
3. *Ejecutar el plan.*
4. *Examinar la solución obtenida.*

El modelo de Goldin (1987) es formulado como un modelo de competencia en resolución de problemas matemáticos basado en los sistemas de representación. Este modelo, está basado en la teoría del procesamiento de la información, y se apoya en la idea de considerar una simulación del pensamiento humano basado en altos niveles de representación.

Los sistemas de representación que utiliza son los siguientes:

- Sistema de representación verbal-sintáctico.
- Sistemas de representación no verbales para el procesamiento de imágenes.
- Sistema de representación formal.
- Sistema de planificación y control ejecutivo.
- Sistema afectivo.

La resolución de un problema aritmético verbal comienza con la lectura y comprensión del enunciado. El papel del lenguaje en el proceso de la resolución de problemas ha recibido una considerable atención desde hace muchos años. Barnett (1984) afirma que la relativamente alta correlación entre la habilidad matemática para resolver problemas y la habilidad para leer y comprender textos escritos ha sido confirmada por numerosos estudios desde comienzos del siglo XX.

Por otro lado, la *comprensión* del enunciado tiene como objetivo el análisis del entorno de la tarea. Este análisis está compuesto por todos los elementos disponibles y que son percibidos por la persona que resuelve el problema: el texto del problema, dibujos, diagramas y objetos concretos, esto es, los datos verbales, numéricos o físicos del problema. Por ello, el análisis del entorno de la tarea en los problemas aritmético-verbales comprende una «escenificación» (representación del contenido) y una clasificación de los datos relevantes en: datos que dan y datos que piden.

En esta primera fase y para alcanzar los objetivos propuestos les sugerimos que, una vez leído el problema atentamente, intenten hacer un dibujo que represente la situación, centrándose en los datos fundamentales del problema y que escriban con palabras los datos que les dan y lo que le piden calcular. De esta forma intentamos evitar que los niños pasen directamente de la lectura (sistema de representación verbal) a una operación aritmética (sistema de representación formal). Esta fase ayuda al alumno a analizar cuidadosamente la situación del problema, lo cual genera una situación afectiva positiva (sistema afectivo).

Para intentar dar respuesta a la necesidad de reconocer la estrategia a seguir (operaciones que hay que realizar), evitar errores en la ejecución de los algoritmos clásicos y superar la dificultad para captar el orden en que hay que realizar las operaciones, proponemos la utilización de un sistema que hemos denominado Sistema de Representación Visual-Geométrico **(S.R.V.G.)**, que es un sistema mixto que comprende:

- Elementos del sistema de representación no verbal, del que tomamos la configuración geométrica bidimensional (el rectángulo) para representar desde operaciones aritméticas hasta las relaciones partes-todo[1], elementos del sistema de planificación o estratégico, donde hacemos intervenir la relación partes-todo y las estructuras semánticas.
- Elementos del sistema de representación formal aritmético del que

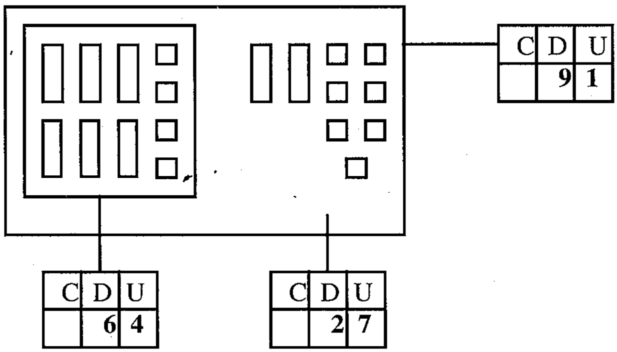
1 La relación partes-todo constituye la base del razonamiento matemático que tiene su equivalencia en las acciones de agrupar y descomponer, base del sistema de numeración decimal y de los algoritmos elementales.

utilizamos la representación simbólica de los números (las etiquetas).

Utilizando este sistema, el siguiente enunciado:

Juan tiene en su colección 91 sellos y Ángel en la suya 27 sellos menos. ¿Cuántos sellos tiene Ángel?

se representaría y resolvería así:



Nuestro objetivo ha sido crear un sistema de representación primordialmente de imágenes que permita al alumno las elaboraciones semánticas y sintácticas que se dan en un problema y que sea autosuficiente, como explicaremos en el apartado siguiente.

Esta fase, que no existe en los modelos que hemos revisado, pretende que el niño, en dicho sistema de representación de imágenes, represente, ejecute y revise la solución obtenida mediante el uso de representaciones visual-geométricas. En un trabajo previo (Socas y Hernández, 1991) detectamos que algunas personas muestran una preferencia por utilizar aspectos de tipo gráfico-geométrico mas que de tipo algebraico, tal como se refleja en los trabajos de Krutetskii (1976). Hacemos hincapié en que la utilización de diagramas no es simplemente un apoyo visual, sino otra alternativa válida para resolver problemas.

Sin embargo, su implantación en el aula ha entrañado dificultades, por diferentes razones (Socas y otros, 1986). Los niños, acostumbrados a un lenguaje formal, veían estos diagramas como un apoyo gráfico y no les parecía correcta la resolución de los problemas de esta forma. Existe la idea, casi generalizada, de que el único objetivo de un problema es lograr una representación y resolución formal, esto es, encontrar y ejecutar la operación adecuada. También hemos encontrado que la representación y solución de forma gráfica tiene una sintaxis compleja, que es necesario trabajar y comprender.

Por supuesto, el uso del sistema de representación formal aritmético constituye una parte básica del aprendizaje en Matemáticas, y por ello hay que desarrollar este procedimiento, pero siendo su elección sugerida para cada resolutor por estrategias de razonamiento y por la comprensión del problema.

Las soluciones encontradas con ambos sistemas deben ser contrastadas, lo que le permite reflexionar sobre los sistemas de representación usados y desarrollar habilidades metacognitivas sobre la utilidad y ventajas de los mismos.

Finalmente, para evitar el que los alumnos no se planteen si la situación obtenida es o no correcta con la información recibida, consideramos que debemos orientar al alumno a que no dé por acabado un problema hasta que haya verificado que el resultado es correcto, contrastándolo con el enunciado y los datos del problema y para ello les pedimos que lo vuelvan a reescribir con dicho resultado.

En resumen, nuestro modelo consta de las siguientes fases:

❶ Lectura del enunciado.
❷ Comprensión.
❸ Representación, ejecución y solución visual geométrica.
❹ Representación, ejecución y solución formal.
❺ Soluciones.
❻ Comprobación de la solución.

La presencia de estas fases no es lineal, como la hemos presentado, sino que el alumno se mueve de un tipo de representación a otra, y utilizándolas obtiene una representación mental de la situación más completa y descubre así el camino para hallar la solución, la ejecuta y la comprueba.

EL SISTEMA DE REPRESENTACIÓN VISUAL-GEOMÉTRICO:

La idea de representación en Matemáticas está adquiriendo un interés creciente en los últimos años. Múltiples son las razones que se aducen para justificar su importancia. Podíamos destacar dos fundamentalmente: la primera tendría que ver con la propia Matemática en la que la representación es algo inherente a ella y otra de cara a su utilización por los alumnos, que apoyaría la idea que las representaciones mejoran notablemente la comprensión de los conceptos.

Hoy en día casi cualquier currículo incluye entre sus recomendaciones metodológicas "el paso del lenguaje oral y manipulativo, al gráfico y al simbólico", e incluso cuando esta recomendación se restringe al mundo de los números suele precisarse más hablándose, por ejemplo, de "correspondencias entre lenguaje verbal, representación gráfica y notación numérica".

No es difícil encontrar el origen de estas recomendaciones en los trabajos de Bruner:

"Los seres humanos han desarrollado tres sistemas paralelos para procesar la información y para representarla: uno, por medio de la manipulación y de la acción; otro, por medio de la organización perceptual y la imaginaria; y otro, por medio del aparato simbólico" (Bruner, 1966, pág. 28).

De ahí surge inmediatamente la necesidad de que en educación se deba poner todo el énfasis posible en las destrezas que tienen que ver con manipular, ver e imaginar, y realizar operaciones simbólicas.

Debemos considerar que en un problema verbal aritmético los sistemas de representación deben tener una doble funcionalidad: representar cantidades y poner en relación las cantidades.

Veamos en un cuadro resumen esta doble funcionalidad de los sistemas de representación que hemos denominado visual-geométrico (analógico) y formal-numérico (digital).

Representación / Función	Analógica	Digital
Comunicar cantidades	"Colecciones de control" (Bloques de base decimal)	Números
Poner en relación las cantidades	Representación de la situación problema mediante las colecciones del control (Establecer una relación entre las partes y el todo en las colecciones)	Estrategias
	Contar progresivamente y contar regresivamente. (Agrupar y descomponer colecciones de control	Hacer cálculos

Para comunicar o representar las cantidades hemos elegido los bloques de base decimal como colección de control que constituyen una representación analógica de tipo discreto. Esta forma de presentar las cantidades establece una cierta correspondencia uno a uno con los datos del problema y es bastante similar a los objetos representados en las cantidades del problema, por eso llamamos a esta forma de representación analógica.

No es éste el caso de las representaciones numéricas, donde la cantidad se representa por el último elemento puesto en correspondencia uno a uno. Así, una colección de caramelos se representa por una sola cifra. Y esta cifra representa la cantidad de una forma aparentemente arbitraria y por eso a esta forma de representación se le denomina digital (numérica o convencional).

Hacer una representación de la situación problema mediante las colecciones de control es llevar a cabo una simulación o imitación de las situaciones que se describen en el enunciado. Esta representación es posible visualizarla en el sistema de representación analógico, no así en el sistema digital que permanece en el mundo privado del resolutor y es lo que hemos denominado estrategias.

De este modo para representar las cantidades utilizamos los bloques de base decimal como colecciones de control, situados dentro de un marco de referencia continuo y bidimensional, el rectángulo, que permite al resolutor realizar, simultáneamente, procesos básicos como contar progresivamente (agrupar) y contar regresivamente (descomponer) con las colecciones de control y establecer las múltiples relaciones que se dan entre las partes y el todo.

Si ahondamos más en estas representaciones observamos que con las colecciones de control se desarrollan procesos de tipo lógico y numérico y con las acciones de componer y descomponer el rectángulo se desarrollan procesos de tipo infralógico y de medida.

Parece útil tender un puente de unión entre esta representación analógica y la representación digital; para ello introducimos las etiquetas o esquemas que sintetizan la función de comunicar cantidades de las representaciones analógicas y digitales. Los números que aparecen en las etiquetas son un referente digital que no intervienen en los procesos de cálculo de este sistema de representación visual-geométrico, que en su conjunto seguimos denominando una representación analógica.

En los trabajos de Kaput (1987, 1989), Janvier (1987), Sanz (1989), Laborde y otros (1989) y otros nos encontramos que los diferentes sistemas de representación utilizan notaciones que los hacen más semánticos que sintácticos o al revés. Así podemos pensar que la notación del sistema de representación visual-geométrico es primordialmente una notación semántica y que la notación del sistema numérico decimal es una notación sintáctica. Sin embargo al sistema de representación visual-geométrico que hemos propuesto lo hemos dotado de una sintaxis necesaria para poder utilizarlo de forma autónoma o autosuficiente en la resolución de problemas verbales aritméticos.

La caracterización de autosuficiente viene dada por:

- Que toda expresión codificada en él puede utilizarse como elaboración sintáctica y como elaboración semántica (entendemos por elaboración sintáctica la manipulación directa de las expresiones, mentalmente o con cualquier tipo de ayuda externa. Y la elaboración semántica sería el manejo de los contenidos de las expresiones simbólicas)

- Que está basado en operaciones internas o en operaciones con magnitudes.
- Que es un sistema de representación significativo (culturalmente, didácticamente o matemáticamente).

(Palarea y Socas, 1994)

EXPERIENCIAS CON EL MODELO.

Este modelo tiene sus orígenes en un Proyecto de Innovación Educativa, subvencionado por la Consejería de Educación de la Comunidad Autónoma Canaria, que se desarrolló en el Curso 84-85, bajo el título: Didáctica para la resolución de problemas de matemáticas en los distintos Ciclos de la E.G.B. (Socas, 1985). Este proyecto tenía como objetivos: elaborar un banco de problemas para la E.G.B., clasificados y presentados con dificultad gradual, confeccionar modelos teórico-prácticos a los que recurrir en este campo, integrar la investigación educativa en la actividad profesional del profesorado de E.G.B. para mejorar las técnicas de aprendizaje en la resolución de problemas, dado el bajo rendimiento de los alumnos en este tema y resaltar la importancia que la resolución de problemas debe tener en la enseñanza de la matemática en los 80.

El proyecto tuvo tres fases:

❶ Análisis del sistema objeto de estudio, destacando los siguientes aspectos: actuación profesional, medios y formación del profesorado; actuación, formación y dificultades del alumno en la resolución de problemas (análisis de tareas); recursos utilizados; análisis de los textos en el aspecto de los problemas y análisis de trabajos anteriores.

❷ Elaboración de un banco de problemas y confección de modelos teórico-prácticos a los que recurrir, así como una ficha de seguimiento de los alumnos en la resolución de problemas.

❸ Presentación a los alumnos de los modelos diseñados, trabajo en los mismos siguiendo las estrategias definidas y seguimiento de estos alumnos mediante las fichas confeccionadas al efecto.

Participaron doce centros y 22 profesores con 919 alumnos de los Ciclos Inicial, Medio y Superior e indirectamente 11 profesores más con 438 alumnos.

Los Ciclos Inicial y Medio se centraron en problemas algorítmicos, mientras los del Ciclo Superior se dedicaron a problemas que hemos llamado "interesantes y poco frecuentes en los libros".

Diseñamos un primer modelo de competencia, en el cual los alumnos no recibieron ninguna instrucción sobre sistemas de representación gráfica, sino que se les daba libertad para que la representación y resolución gráfica la hicieran de la forma que quisieran. Fue llevado al aula y de los resultados obtenidos pudimos señalar varias e interesantes apreciaciones generales en cuanto a la resolución de los problemas aritméticos:

- Los alumnos desarrollan una mayor expresión gráfica al indicárseles que realizaran una viñeta del problema.
- Se acostumbran a distinguir rápidamente entre los datos que le dan y lo que le piden.
- Se van acostumbrando a una representación global del problema, usando el esquema partes-todo.
- Son más críticos ante los resultados obtenidos.
- Sin embargo, la utilización de sistemas gráficos no es generada espontáneamente por parte de los niños, sino que necesita una cierta instrucción.

Una experiencia más reciente se ha realizado con un grupo de 355 alumnos de 3°, 4° y 5° de E.G.B. (Hernández, 1996). Sus profesores conocieron el modelo en un curso, utilizando una técnica que hemos denominado: "por inmersión". Esto es, hacemos que los profesores desarrollen el modelo como si se tratara de sus alumnos, siguiendo el mismo proceso y utilizando el mismo material que habíamos preparado para ellos. Simultáneamente, les justificamos el porqué del mismo, reflexionando sobre diversas investigaciones sobre este tema.

El aprendizaje del modelo se hizo a través de un diseño de instrucción, ya que es necesario el aprendizaje de la sintaxis del mismo. En este diseño se contemplaron problemas de todas las categorías semánticas, trabajando en cada una de ellas el uso de ambos sistemas, e insistiendo en la importancia que el desarrollo de habilidades metacognitivas tiene en el aprendizaje.

La valoración que han hecho los profesores acerca de este modelo es altamente positiva, recalcando el hecho de que el modelo evita resolver los problemas de forma mecánica y potencia habilidades de reflexión y análisis.

APORTACIONES DEL MODELO DE COMPETENCIAS DESDE UNA PERSPECTIVA CURRICULAR Y DESDE EL PUNTO DE VISTA DEL PROFESORADO.

Consideramos en este apartado el modelo de competencia propuesto y lo relacionamos con los procedimientos requeridos en la resolución de problemas según el D.C.B. de Matemáticas de Primaria. Recogemos las principales aportaciones en el siguiente cuadro resumen:

Procedimientos	**Aportaciones del S.R.V.G.**	**Aportaciones del sistema de representación aritmético**	**Aportaciones del modelo de competencias**
Dominio funcional de diferentes sistemas de representación (verbal, gráfico, físico, numérico,...)	Representación analógica para comunicar cantidades: colecciones de control	Representación digital para comunicar cantidades.	Conexiones matemáticas entre los sistemas de representación a nivel semántico.
Dominio funcional de destrezas básicas de cálculo mental, de conteo, algoritmos de cálculo,...	Agrupar y descomponer las colecciones de control mediante técnicas de conteo para obtener la solución del problema.	Cálculos para obtener la solución del problema.	Conexiones matemáticas entre los sistemas de representación a nivel sintáctico (manipulación aritmética y visual geométrica).
Dominio funcional de estrategias de razonamiento.	Agrupamientos y relaciones asimétricas a nivel infralógico y de medida.	Agrupamientos y relaciones asimétricas a nivel lógico y numérico.	Conexiones matemáticas entre los agrupamientos y relaciones asimétricas a nivel de operaciones lógicas e infralógicas y numérico y de medidas.

Como podemos ver, el aspecto más importante que aporta nuestro modelo de competencia tiene que ver con las conexiones entre ambos sistemas, tanto a nivel semántico como a nivel sintáctico, poniéndose en juego las relaciones entre lo lógico e infralógico, esto es, entre lo numérico y lo métrico.

Merece la pena recordar que las conexiones matemáticas constituyen hoy uno de los objetivos esenciales de la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas. Estas conexiones tienen una doble dimensión: conexiones internas de las Matemáticas y conexiones externas. Entre las conexiones internas tenemos las conexiones entre las distintas partes y temas de la matemática y las conexiones entre representaciones equivalentes y entre los correspondientes procesos de cada una. Y entre las conexiones externas tenemos las conexiones en la elaboración de modelos para situaciones del mundo real o para situaciones que se dan en otras disciplinas.

Son las conexiones internas entre representaciones equivalentes y entre los correspondientes procesos de cada una, y las conexiones externas con el mundo real, las que se sugiere desarrollar con profusión en este modelo de competencias.

Es importante recordar que cuando los estudiantes son capaces de trasladar a diferentes representaciones una misma situación de problema, tendrán a un tiempo un conjunto potente y flexible de herramientas para resolver problemas y un aprecio más profundo por la coherencia y belleza de las matemáticas.

No hemos querido aportar datos sobre el trabajo empírico con el modelo (Hernández, 1996), sino reflexionar sobre él desde una perspectiva matemática y con relación a las demandas requeridas por el D.C.B. de Primaria de Matemáticas.

En definitiva, podemos concluir que el modelo de competencias aporta un marco global que facilita las conexiones matemáticas externa e interna, y permite trabajar con estrategias generales (Polya), con las estructuras semánticas del campo conceptual aditivo, con las estructuras semánticas del campo conceptual multiplicativo, con el esquema partes-todo, etc., poniendo en juego los diferentes procedimientos requeridos en el D.C.B. de Primaria de Matemáticas.

Reseñas bibliográficas:

Barnett, J. (1984): The Study of Syntax Variables. En Goldin y McClintock (Eds): *Task Variables in Mathematical Problem Solving.* The Franklin Institute Press. Philadelphia. Pennsylvania.

Bruner, J. S. (1966): *The process of Education.* Harvard University Press, Cambridge, Massachusetts.

Carpenter, T. P. And Moser, J. M. (1983). The acquisition of addition and subtraction concepts. En, Lesh, R. and Landau, M.(Eds). *Acquisition of Mathematics concepts and processes (pg 7-44).* Academic Press. U.S.A.

Consejería de Educación de Canarias (1991). *Diseños curriculares. Educación Primaria.* Gobierno de Canarias. Tenerife

Goldin, G.A. (1987): Cognitive Representational Systems for Mathematical Problem Solving. En Janvier (Ed) *Problems of representation in the teaching and learning of Mathematics.* Hillsdale. N.J.: Lawrence Erlbaum.

Hernández, J. (1996): *Sobre habilidades cognitivas heurísticas y metacognitivas en la resolución de problemas aritméticos verbales.* Tesis doctoral. Universidad de La Laguna.

Hernández, J. y Socas M.M. (1996): Arithmetic word problems invented by children on the basis of an arithmetic operation. (Envíado).

Janvier, C. (Ed) (1987): *Problems of representation in the teaching and learning of Mathematics.* Hillsdale. N.J.: Lawrence Erlbaum.

Kaput, J. J. (1987). Representation Systems and Mathematics. En C. Janvier (Ed): *Problems of Representation in the Teaching and Learning of Mathematics.* L.E.A. pp. 19-26.

Kaput, J. J. (1987). Toward A Theory of Symbol Use in Mathematics. *Problems of Representation in the Teaching and Learning of Mathematics.* (Janvier). L.E.A. pp. 159-196.

Kaput, J. J. (1989). Linking Representations in the Symbol Systems of Algebra. In S. Wagner & C. Kieran (Eds.),*Research Issues in the Learning and Teaching of Algebra,* 167-194. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics, Hillsdale, NJ: Lawrence Erbaum.

Krutetskii, V.A. (1976): *The Psychology of Mathematical Abilities in School children.* University of Chicago Press.

Laborde, C. et al. (1989): Language and Mathematics. En Nesher-Kilpatrick (El.), *Mathematics and Cognition, 53-69.* Cambridge University Press. ICMI. Study Series.

M.E.C. (1989): Diseños curriculares básicos de Primaria. Madrid.

N.C.T.M. (1980): An agenda for action. Recomendations for School Mathematics of the 19805. The Council. Reston. Virginia.

Palarea, M. M. y Socas, M. M. (1994). Elaborations semantiques Vs elaborations syntactiques dans l'enseignement-apprentissage de l'algebra scolaire (12-16 ans). *Actas de la 46 C.I.E.A.E.M.* Tolouse. Francia.

Peled, I. y Nesher, P. (1988): What children tell us about multiplication word problems. *Journal of Mathematical Behavior, 7,* 239-262.

Polya, G. (1945) *How to solve it.* (Traducción española: Cómo plantear y resolver problemas. México. Ed. Trillas, 1976).

Sanz, I. (1990). Comunicación, lenguaje y matemáticas. En Llinares, S. y Sánchez, M. V. (Eds.). Teoría y práctica en Educación Matemática (pp. 173-235). Alfar. Sevilla.

Socas, M. M. y otros (1985): *Didáctica para la resolución deproblemas de Matemáticas en los diferentes ciclos de E.G.B.* Memoria del proyecto de investigación subvencionado por la Dirección General de Promoción Educativa y Renovación Pedagógica de la Consejería de Educación del Gobierno de Canarias.

Socas, M. M y otros (1986): Propuesta didáctica sobre resolución de problemas de sumas, restas, multiplicaciones y divisiones en la E.G.B. *Revista Números, Vol. 13.*

Socas, M.; Hernández, J. (1991): Analogías y diferencias observadas entre buenos y malos resolutores de problemas matemáticos. *Actas V JAEM* . Castellón. (En prensa)

CIENCIA EXACTA

Cuando yo estudiaba
siempre me preguntaba
que eran las matemáticas
y siempre me respondían
que era la ciencia exacta.
Ahora, con el tiempo,
y casi sin querer,
he venido a comprender
que matemáticas, eres tú,
porque sólo tú eres ciencia exacta.
Compendio de arcos,
revolución de curvas insinuantes,
conjunto de líneas y trazos
que se unen de modo exacto...
Derivación de lo fantástico,
integral sin límite de la belleza,
...y es que me atrevo, con toda certeza,
a decir en voz alta,
que eres tú la ciencia exacta.
senos de perfección,
tangente sin rumbo,
trigonometría del mundo...
Ya es imposible negar,
que ante ti sucumbo.
Figura de forma esbelta,
diámetro preciso,
todo en ti resuelve un área
que abandona lo indeciso.
Raíz de lo más sano,
incógnita exótica,
naturaleza en potencia,
...y es que digo a conciencia,
que además de ser tarta,
también es ciencia exacta.

(sigue en la pág. 44)