ESTUDIO DE LÍMITES Y LA CONTINUIDAD DE FUNCIONES USANDO DERIVE®

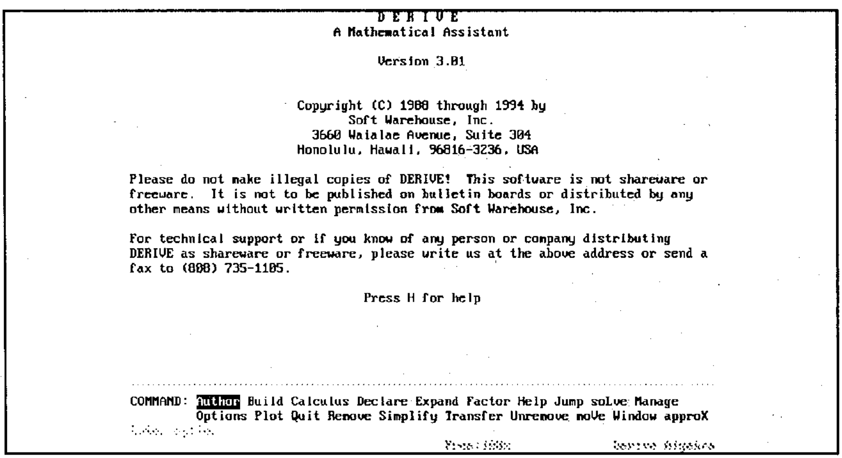
Manuel Quintana Perera

DERIVE® es un programa de ordenador de grandes posibilidades y de manejo relativamente fácil que puede ser utilizado en ordenadores de prestaciones sencillas.

No se pretende aquí tratar el tema de forma exhaustiva, ni estudiar a fondo el manual del programa, sino ver algunas de las posibilidades que éste ofrece.

PARA TODOS

Al entrar en el programa nos aparece una pantalla como la de la figura:



INSTITUTO "CANARIAS CABRERA PINTO" La Laguna.

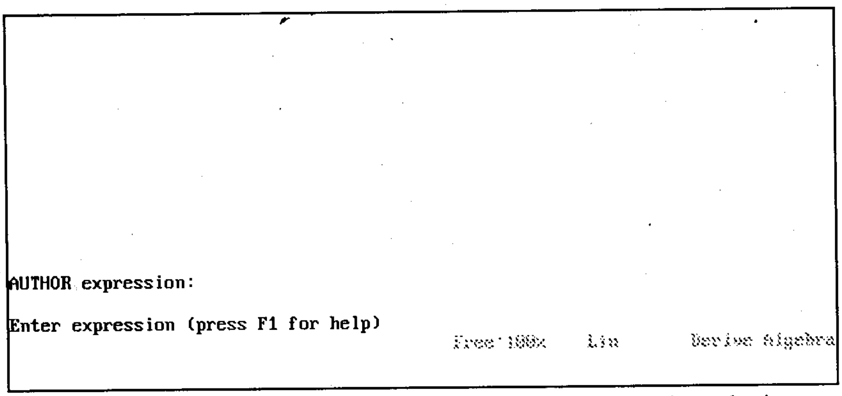
La parte superior es como la pizarra donde aparecerán a lo largo de la sesión de trabajo todos los cálculos, gráficas, etc.

Bajo la línea doble aparece en primer lugar el menú de comandos u órdenes que se pueden elegir y que se llamará *menú principal.*

En la línea inferior te pide que introduzcas la opción (**Enter option**), informa sobre la cantidad de memoria disponible y recuerda que estás en el menú principal.

Observa que aparece el comando **Author** resaltado, lo que indica que es la opción activa. Si pulsamos la tecla **<Enter>**, el programa interpreta que has elegido dicho comando. Para cambiar de opción podemos desplazarnos a través del menú con la barra espaciadora o bien pulsando la letra de la opción que aparece en mayúscula (p.e. para indicar **soLve** pulsaremos la **L**, etc.).

Elige **Author**, la pantalla aparece así:



El programa te pide que introduzcas una expresión. La introducimos y pulsamos **<Enter>**. Si observamos que nos equivocamos antes de pulsar **<Enter>** , podemos corregir33lo moviéndonos con las teclas de desplazamiento del cursor hacia la izqda. y dcha. (<←> , <→>). Si pulsamos la tecla **<Insert>**, podemos insertar caracteres, etc. en la posición del cursor.

Una vez pulsado **<Enter>**, aparece en la pantalla superior (*pizarra.* **Algebra**) la expresión que hemos escrito precedida del carácter "# " y un número. La numeración de las expresiones, operaciones, etc. que aparecen en la *pizarra* nos permitirá acceder a ellas en cualquier momento de la sesión. Al igual que en el menú principal, la expresión activa aparece resaltada. Podemos movernos a cualquier expresión con las teclas de desplazamiento del cursor hacia arriba y abajo (<↑> ,<↓>). También podemos usar el comando **Jump** que nos activará la expresión que corresponda al número que indiquemos (no olvidarse de anteponer el " # ")

Las teclas <**Inicio**> y <**Fin**> nos llevan respectivamente al comienzo y final de la sesión.

Si usamos las teclas de desplazamiento horizontal del cursor sobre una expresión nos activará parte de ella (en un cociente nos activará el numerador o el denominador, en una igualdad nos activará la parte dcha. o la izqda.., etc.).

Para corregir una expresión que se encuentra en la *pizarra* o ventana de **Algebra** pulsamos **Author** y podemos escribirla de nuevo o , estando activa la errónea, pulsar <**F3**>, esto hace que nos aparezca en la línea de edición la expresión activa que queremos corregir.

Para introducir expresiones tenemos que tener en cuenta, entre otras cosas, que x^2 se escribe x^2, la raíz cuadrada se puede poner sqrt(x), si tiene otro índice, tenemos que ponerla usando potencias de exponente fraccionario (p.e. x^(1/3) será $\sqrt[3]{x}$); hay que separar las expresiones del numerador y del denominador mediante paréntesis; para las funciones trigonométricas debemos tener en cuenta que el programa está escrito en inglés, así la función sen^2x se debe poner de la forma: sin^2(x) (el argumento debe figurar entre paréntesis) o (sin(x))^2, etc. Los corchetes representan en DERIVE una matriz o un vector y, por tanto, no se deben usar para indicar prioridad.

Para introducir una función no es necesario utilizar la notación "y=", basta con poner la expresión. Sin embargo, dado que tendremos que usarla más adelante, definiremos una función cualquiera escribiendo "f(x):=" en la línea de **Author**.

Para abortar cualquier operación debemos pulsar la tecla <**Esc**>

PARA PROFESORES

DERIVE permite grabar una sesión de trabajo, es decir, el contenido de una *pizarra*. Para ello debemos usar los comandos **Transfer, Save, Derive** y darle un nombre (si no se le asigna extensión, DERIVE adjudica automáticamente la extensión **mth**).

Para rescatar una sesión debemos usar los comandos **Transfer, Load, Derive** y decir el nombre (si tenemos dudas podemos pulsar <**F1**> y nos aparece el listado de archivos). Hay que tener en cuenta que **Transfer, Load** borra el contenido actual de la *pizarra*. Si queremos que esto no ocurra, usamos los comandos **Transfer, Merge** y escribimos el nombre del archivo, DERIVE lo rescata a continuación del último apunte de la *pizarra*.

DERIVE dispone de una serie de ficheros con diversas utilidades (la mayoría funciones). Para acceder a ellas es necesario cargar previamente el fichero. Para ello podemos usar los comandos **Transfer, Utility** y escribimos el nombre del fichero. DERIVE lo carga en memoria pero no aparece en la *pizarra*. Sin embargo, podemos disponer de cualquiera de las funciones, etc. allí definidas.

DERIVE permite también grabar el contenido de la *pizarra* en un fichero de texto (Atención: Sería sólo un fichero de texto, y DERIVE no podrá usarlo posteriormente. Lleva extensión **ptr**) con los comandos **Transfer, Print, Expressions, File** (en **Options** podemos elegir si queremos todas las expreşiones o algunas, etc.). Los comandos **Transfer, Print, Expressions, Printer** imprime todas o parte de las expresiones de la *pizarra* (en **Print,Options** podemos elegir el tipo de impresora; el modo: **Landscape**= horizontal, **Portrait**= vertical; el **Color** de fondo, etc.).

Se puede grabar también el contenido de la pantalla, en sentido gráfico, en la versión 3.01. Para ello usamos los comandos **Transfer, Print, Screen** ,en **Options** debemos elegir si queremos que grabe todo incluido el menú (**All**), que grabe toda la pantalla sin menú (**Window**) o que grabe sólo la pantalla activa (**Current**), **Name** sirve para indicarle el directorio donde queremos que grabe esa imagen gráfica y el nombre (el nombre no lo cambia, si grabamos varias pantallas, le asigna un número detrás del nombre. P.e., si decidimos que el nombre sea *grafo*, el 1º se llamará *grafo*, el 2º *grafo1*, el 3º *grafo2*, etc.) después usaremos el comando **File**. La secuencia de comandos es púes: **Transfer, Print, Screen, Options, File**. La extensión de la imagen es **TIF** (Un gráfico tipo **Tif** puede ser rescatado por un procesador de textos actual como WP60DOS, WPWIN, WIN-WORD, etc)

También se puede mandar la imagen directamente a la impresora con la secuencia **Transfer, Print, Options** (opciones de impresora, etc.), **Screen, Options** (toda la pantalla, nombre, etc.), **Printer.**

DERIVE permite trabajar con una o varias pantallas. Para abrir una pantalla, usamos los comandos **Window, Split, Horizontal** o **Vertical**, (nos pedirá que indiquemos la fila o columna. Columnas=80, Filas=24), y se nos queda la pantalla dividida, en principio, en dos.

Podemos designar la nueva pantalla como de **Algebra** (*pizarra*), **2-D plot** (para dibujar gráficas en 2 dimensiones) o **3-D plot** (para dibujar superficies) con los comandos **Window, Designate.**

Podemos pasar de una ventana a otra con la tecla <**F1**>. La ventana activa es la que tiene su número resaltado.

Podemos cerrar una ventana con **Window**, **Close**. Nos pedirá el nº de la ventana (Atención: si la ventana que cerramos es de **Algebra**, perderemos toda la información contenida en ella. De todas maneras, nos da un mensaje de advertencia: ***Abandon expressions (Y/N)?*** y espera a que contestemos)

Para salir del programa pulsamos **Quit** y nos aparecerá el mismo mensaje anterior si previamente no hemos grabado la sesión.

Otros comandos importantes están definidos en los ejemplos que vienen a continuación.

Una vez vista esta pequeña introducción, vamos a tratar el tema de los límites de funciones desde el DERIVE.

PARA EMPEZAR A TRABAJAR

Empezaremos definiendo una función cualquiera. Para ello, como ya dijimos, debemos poner "f(x):=" en la línea de **Author**.

Dada una función *f(x)*, se pueden obtener sus límites de una forma rápida con el comando **Calculus**, con el cuál accedemos a un submenú en donde aparece **Limit** y después un cuadro de diálogo en donde nos pide que confirmemos si queremos calcular el límite de la expresión activa, con respecto a qué variable queremos que calcule el límite *(x)*, con respecto a qué punto y si queremos un límite lateral o por ambos lados (para desplazarse a través del cuadro de diálogo debemos pulsar la tecla <**Tab**> y para activar una opción debemos pulsar la letra mayúscula de la opción. La opción que está activada figura entre paréntesis)

```
             2
#5:  F(x) := x  - 1

CALCULUS LIMIT: Point: _                    From:(Both)Left Right

Enter limit point
User                 C:LIMITES.MTH          Free:100%             Derive Algebra
```

También se puede indicar desde **Author** la función: *LIM(F(x), x, a)* que nos calcula el límite de *f(x)*, en el punto *a*. Si ponemos *LIM(F(x), x, a, 1)* calcula el límite por la dcha. del punto *a*. *LIM(F(x), x, a, -1)* calcula el límite por la izqda..

Igualmente se pueden calcular límites en el infinito, éste símbolo se obtiene en DERIVE escribiendo *"inf"* o *"- inf"* o también pulsando <**Alt**> + <**0**>.

Podemos representar gráficamente x^x. Para ello debemos usar la orden **Plot.** Nos pregunta si queremos que dibuje al lado(**Beside**), debajo (**Under**) u ocupando toda la pantalla (**Overlay**). Si decidimos **Beside**, se divide por la mitad la pantalla (columna 40) y se nos abrirá una ventana gráfica a la dcha. sin dibujar la función.

Observamos que aparece un nuevo menú (el de la ventana gráfica).

La orden **Algebra** sirve para volver a la *pizarra* También la tecla <**F1**> permite pasar de una ventana a otra. La ventana activa aparece con su número resaltado.

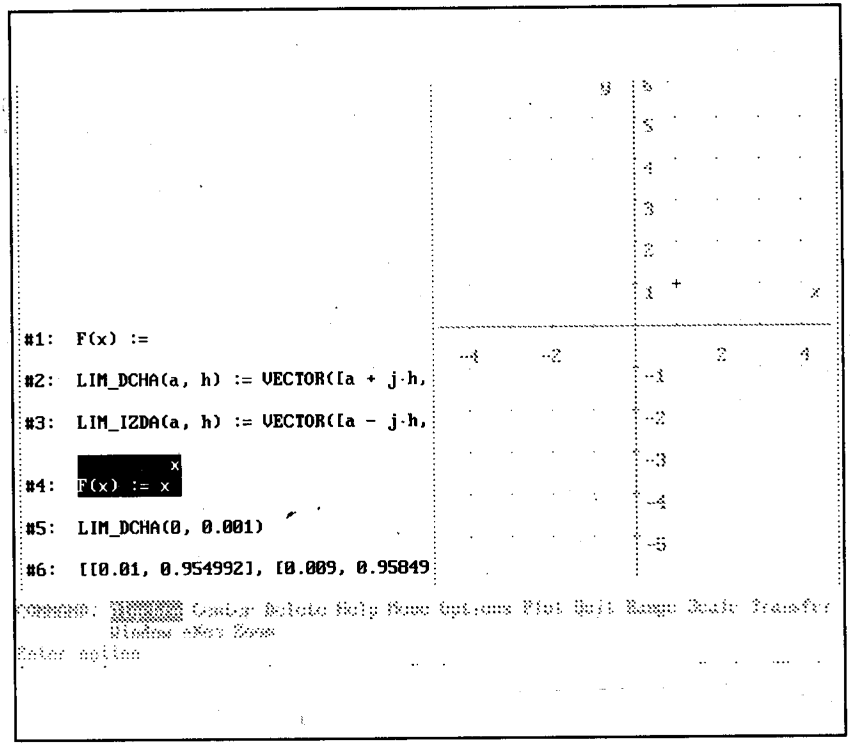
Para que dibuje la función debemos pulsar otra vez **Plot**. Si nos la dibuja de una forma no continua significa que tenemos mal elegida la opción de gráficos. Esto se puede corregir pulsando la tecla <**F5**>.

Observa que aparece una cruz (**Cross**). Se puede mover lentamente con las teclas del cursor y más rápidamente si usamos las teclas <**Re Pág**> y <**Av Pág**> para el desplazamiento vertical, y <**Ctrl**> + <**→**> o <**Ctrl**> + <**←**> para el desplazamiento horizontal. También se puede hacer con la orden **Move** que desplazará la cruz al punto de coordenadas (*x,y*) que le indiquemos. En la línea inferior del menú aparecen las coordenadas de la cruz.

Podemos centrar la pantalla gráfica con respecto a la cruz con la orden **Center**.

Podemos cambiar la escala en cualquier eje con la orden **Scale**. Podemos cambiar el rango con la orden **Range** (acuérdate que el desplazamiento dentro del submenú se hace con la tecla <**Tab**>). Podemos cambiar el número de columnas (**Columns**) y filas (**Rows**) que entran por cada marca en el comando **aXes** (Puesto que el número de colunas es mayor que el número de filas, se debe conservar la relación de doble número de columnas que de filas si se quiere que se mantenga el mismo aspecto en los dos ejes).

Si queremos que la cruz se desplace a lo largo de la gráfica pulsamos



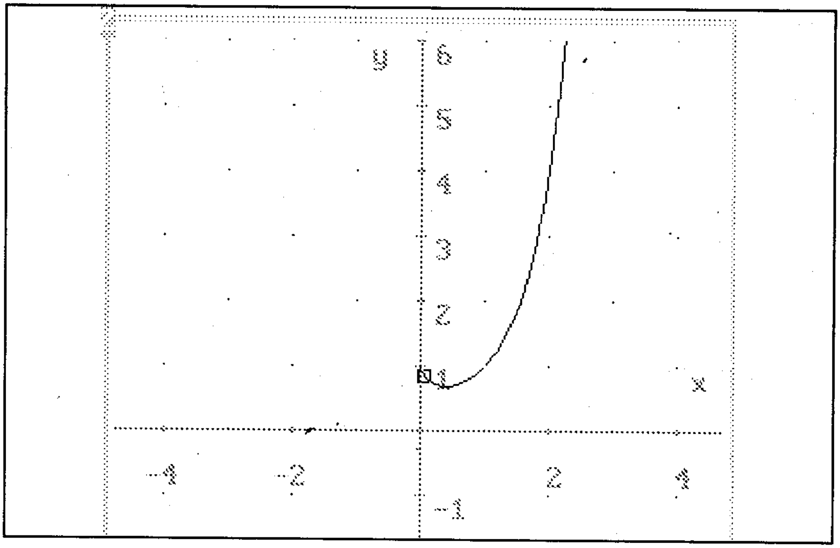
<F3>, y nos movemos con los cursores de desplazamiento horizontal. La pantalla se trasladará siguiendo la gráfica de la función. En todo momento aparece el la línea inferior las coordenadas de la cruz, que en este caso corresponderán a las de un punto del grafo de la función.

Si queremos volver a la posición inicial debemos pulsar otra vez **<F3>** y mover con **Move** la cruz a la posición (0,0) y después **Center**.

Para hacer un *zoom* de la gráfica podemos activar el comando **Zoom** o bien si pulsamos <**F9**> haremos un *zoom* hacia dentro en ambos ejes y <**F10**> nos lo hace hacia fuera. También las teclas <**F7**>, <**Shift**> + <**F7**>, <**F8**> y <**Shift**> + <**F8**> nos hacen *zoom* hacia dentro o hacia fuera en los ejes *y* y *x* respectivamente.

Para borrar la gráfica pulsamos la **D** de **Delete**, se nos abre un segundo menú en donde podemos optar por borrar todas (no borra la ventana de gráficos) :**All**, todas salvo la última: **Butlast**, la primera: **First** o la última: **Last**

Con todo esto se nos abre grandes posibilidades para tratar los límites y la continuidad a cualquier nivel. Veamos una serie de ejemplos resueltos:



PARA TRABAJAR CON LOS ALUMNOS

Ejemplo 1.- *Sea la función $f(x)=x^2-1$*

Cargamos el fichero LIMITES de un disquete. Para ello ponemos **Transfer**, **Load**, **Derive** y luego escribimos el nombre del fichero: A: LIMITES. Observarás que en la *pizarra* aparecen las expresiones que corresponden al fichero.

En **Author** escribimos primero la función, es decir, ponemos F(x):= x^2-1 y pulsamos <**Enter**>, luego **Author** otra vez y escribimos LIM_DCHA(2, 0.01) y <**Enter**>, aproximamos la expresión resultante con **approX** y nos aparece la siguiente tabla de valores:

2.1	3.41
2.09	3.36810
2.08	3.3264
2.07	3.2849
2.06	3.24360
2.05	3.2025
2.04	3.1616
2.03	3.12089
2.02	3.0804
2.01	3.0401

Para ver como actúa la función fíjate que en la columna de la derecha aparecen las sucesivas aproximaciones al valor a=2 y en la columna de abajo los valores que toma la función en esos puntos. Observa que a medida que avanzamos en la columna, los valores están más próximos a 2, y que la diferencia entre valores consecutivos es precisamente 0.01

¿El límite por la derecha es 3.0401? Razona tu respuesta.
¿Qué ocurre si nos acercamos más al punto a=2? Compruébalo construyendo la tabla LIM_DCHA(2, 0.001)

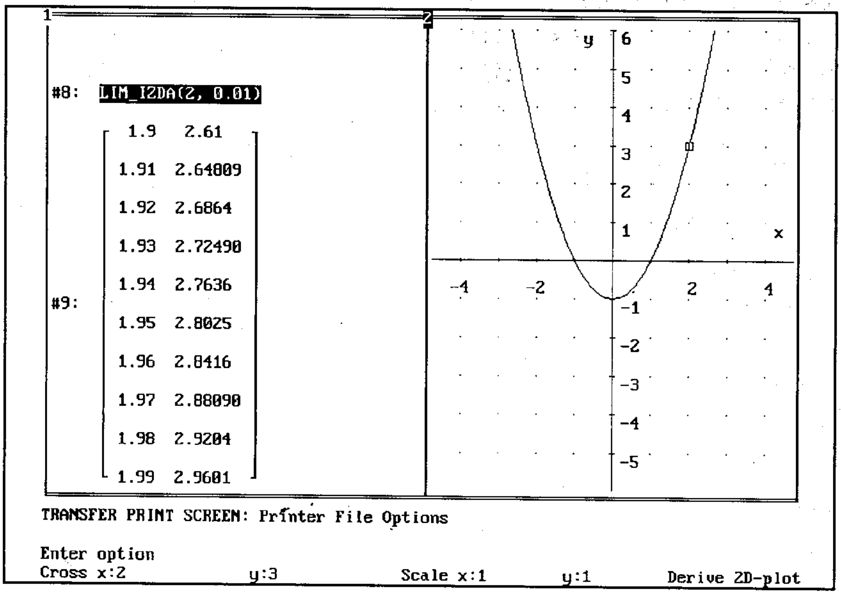
Si escribimos en **Author**: LIM_IZDA(2, 0.01) y **<Enter>** y luego **approX** obtenemos la tabla:

1.9	2.61
1.91	2.64809
1.92	2.6864
1.93	2.72490
1.94	2.7636
1.95	2.8025
1.96	2.8416
1.97	2.88090
1.98	2.9204
1.99	2.9601

¿El límite por la izquierda es 2.9601? Razona tu respuesta.
¿Qué ocurre si nos acercamos más al punto a=2? Compruébalo construyendo la tabla LIM_IZDA(2, 0.001)

A la vista de los resultados obtenidos en los apartados anteriores, *¿cuánto vale* $\lim_{x\to 2} f(x)$ *?*

Representa gráficamente la función. Sobre la función resaltada pulsa **Plot, Beside, <Enter>, <Enter>** y **Plot,** deberás obtener una pantalla como la que sigue:



Sobre la gráfica pulsa <**F3**>, *¿qué valores toma la función (y) cuando nos acercamos al punto x=1? ¿Confirma los resultados obtenidos anteriormente?*

Ejemplo 2.- *Sea la función:* $f(x)=\begin{cases} x & si\ x\leq 0 \\ x^2-1 & si\ x>0 \end{cases}$

Para definir esta función en DERIVE debemos poner en **Author** la siguiente línea:

F(x):=IF(x<=0, x , x^2-1)

Aunque aparezcan dos funciones con el mismo nombre, DERIVE sólo "hace caso" a la última definida. La función *IF* tiene tres argumentos, el primero es la condición, devuelve o actúa el segundo argumento si la condición es verdadera y devuelve o actúa el tercer argumento si la condición es falsa.

Construye la tabla

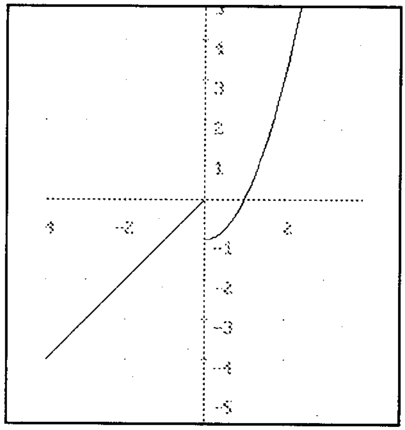
LIM_DCHA(0, 0.001) de la misma forma que en el ejemplo 1

¿Cuál crees que es $\lim_{x \to 0^+} f(x)$ *?*

Construye igualmente la tabla LIM_IZDA(0, 0.001) *¿Cuál crees que es* $\lim_{x \to 0^-} f(x)$ *?*

¿Existe en este caso $\lim_{x \to 0} f(x)$ *?*

Para dibujar la función, debes borrar primero la anterior. Para ello pasa a la ventana de gráficos pulsando <**F2**> y pulsa **Delete, All**, vuelve otra vez a la ventana de **Algebra** (*pizarra*) y con la nueva función resaltada pulsa **Plot, Plot** y te debe quedar una gráfica parecida a la de la izquierda.



Sobre la gráfica pulsa <**F3**>, *¿qué valores toma la función (y) cuando nos acercamos al punto x=0? ¿Confirma los resultados obtenidos anteriormente?*

Ejemplo 3.- *Sea la función* $f(x) = \dfrac{senx}{x}$

En **Author** escribe F(x):= sinx /x y <**Enter**>

Construye la tabla LIM_DCHA(0, 0.005) de la misma forma que en el ejemplo 1 *¿Cuál crees que es* $\lim_{x \to 0^+} f(x)$ *?*

Construye igualmente la tabla LIM_IZDA(0, 0.005) *¿Cuál crees que es* $\lim_{x \to 0^-} f(x)$ *?*

¿Existe $\lim_{x \to 0} f(x)$ *?*

Intenta calcular f(0) poniendo en **Author** F(0) y luego **Simplify** o **approX** *¿qué ocurre?*
¿Está definida la función en x=0?

Representa a la vez las funciones **senx** y **x**. Para ello puedes hacerlo de dos formas: una es escribir en **Author** la expresión **sinx,** <**Enter**> y luego **Plot,** borras la gráfica anterior con **Delete, All** y vuelves a pulsar **Plot,** luego vuelves a la pizarra con **Algebra** o <**F1**>, vuelves a pulsar **Author** y escribes **x**, <**Enter**>,**Plot, Plot**; otra forma es, estando resaltada la función f(x), pulsas <↔>,<↓>, **Plot**, **Delete, All, Plot** y luego **Algebra**, <↔>, **Plot, Plot.**

¿Cómo son ambas gráficas cerca de x=0? Mueve la cruz al punto (0,0) con **Move,** **x=0**, <**Tab**>,**y=0** y luego haz zoom hacia dentro pulsando un par de veces la tecla <**F9**>.
¿Tiene alguna relación con el resultado de $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$?

Ejemplo 4.- *Sea la función* $f(x)=\dfrac{-2}{x+1}$

En **Author** escribe F(x):=-2 / (x+1) y luego <**Enter**>

Construye las tablas LIM_DCHA(-1, 0.001) y LIM_IZDA(-1, 0.001)

¿Será $\lim\limits_{x\to -1^+} f(x)$ *menor que -2000?* Construye la tabla LIM_DCHA(-1, 0.00001) *¿Qué ocurre?*
¿Será $\lim\limits_{x\to -1^-} f(x)$ *mayor que 2000?* Construye la tabla LIM_IZDA(-1, 0.00001) *¿Qué ocurre?*
¿Qué se puede decir de $\lim\limits_{x\to -1^+} f(x)$ *y* $\lim\limits_{x\to -1^-} f(x)$?

Borra la gráfica anterior tal como se te explicó en el ejemplo 2 y representa gráficamente la función. Haz un zoom hacia fuera pulsando la tecla <**F10**> hasta que las marcas en los ejes queden como al principio. Sobre la gráfica pulsa <**F3**>, *¿qué valores toma la función (y) cuando nos acercamos al punto x=-1? ¿Confirma los resultados obtenidos anteriormente?*

Ejemplo 5.- *Sea la función* $f(x)=\dfrac{2x}{|x-1|}$

En **Author** escribe F(x):= 2x / abs(x-1) y <**Enter**>. La función ABS significa "valor absoluto"

En **Author** escribe LIM_INFINITO(100,1000,100) ,<**Enter**> y luego **approX**. Debes obtener una tabla como la siguiente:

100	2.02020
200	2.01005
300	2.00668
400	2.00501
500	2.00400
600	2.00333
700	2.00286
800	2.00250
900	2.00222
1000	2.00200

En la columna de la izquierda aparecen los valores de la *x*, desde un valor inicial *x=100* hasta el valor final *x=1000* con una diferencia entre valores consecutivos de 100 unidades.

¿Si x se hace cada vez mayor, la función se aproxima a algún valor determinado? ¿Será 2.002?

Construye la tabla LIM_INFINITO(1000,10000,1000)

¿Cuánto vale $\lim_{x\to+\infty} f(x)$?

En **Author** escribe LIM_INFINITO(-100,-1000,-100) ,<**Enter**> y luego **approX**. Debes obtener una tabla como la siguiente:

-100	-1.98019
-200	-1.99004
-300	-1.99335
-400	-1.99501
-500	-1.99600
-600	-1.99667
-700	-1.99714
-800	-1.99750
-900	-1.99778
-1000	-1.99800

En la columna de la izquierda aparecen los valores de la x, desde un valor inicial x=*-100* hasta el valor final x=*-1000* con una diferencia entre valores consecutivos de -100 unidades.

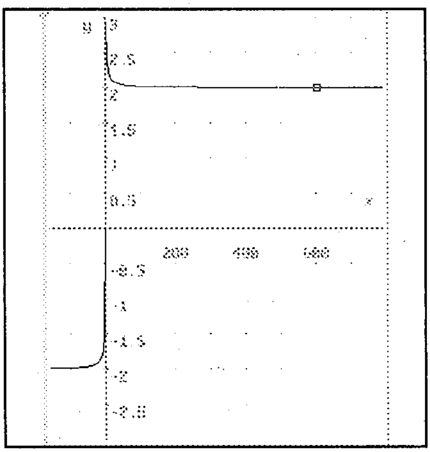
¿Si x toma valores cada vez menores, la función se aproxima a algún valor determinado?

Construye la tabla LIM_INFINITO(-1000,-10000,-1000)

¿Cuánto vale $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ *?*

Borra la gráfica anterior tal como se te explicó en el ejemplo 2 y representa gráficamente la función. Cambia la escala con **Scale, x=100,<Tab>, y=0.5**.

Te debe quedar una gráfica como la de la figura:



Pulsa <**F3**> y observa, a medida que te desplazas hacia la derecha con la cruz, los valores de **x** e **y**. Haz también el desplazamiento hacia la izquierda. *¿Concuerda lo observado con lo que has obtenido anteriormente?*

***Ejemplo 6** .- Sea la función*

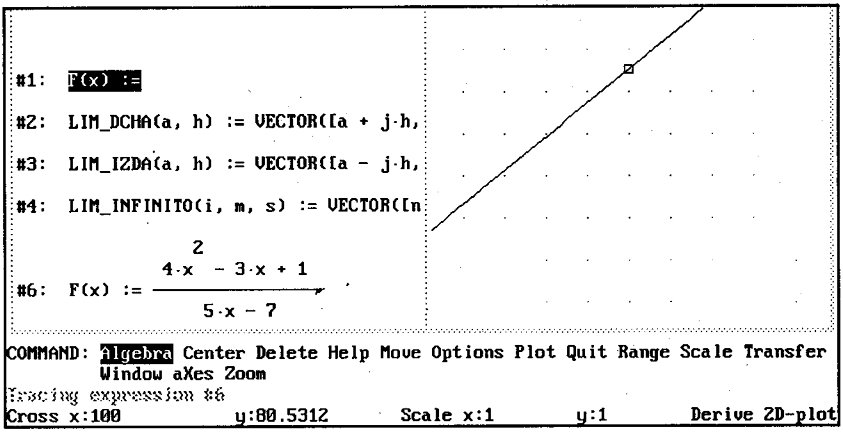
$$f(x)=\frac{4x^2-3x+1}{5x-7}$$

En **Author** escribe F(x):=(4x^2-3x+1) / (5x-7) y <**Enter**>

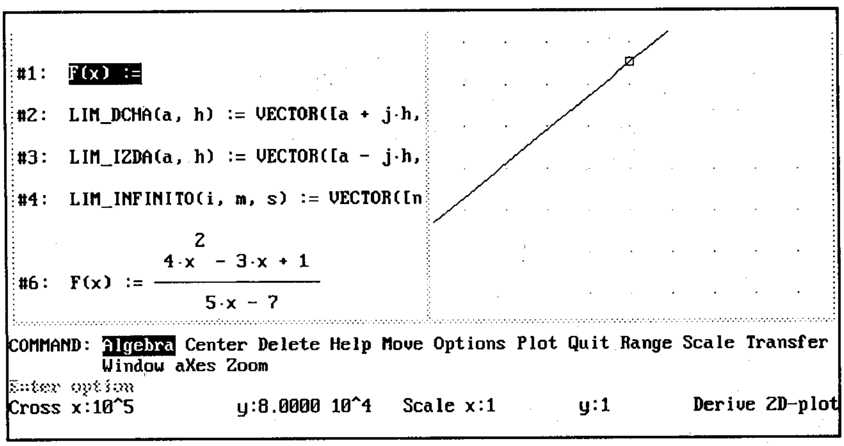
Borra la gráfica anterior tal como se te explicó en el ejemplo 2 y representa gráficamente la función. Cambia la escala con **Scale, x=1,<Tab>, y=1**.

A la vista de la gráfica, *¿cuál crees que es* $\lim_{x \to +\infty} f(x)$*?* Mueve la cruz al punto x=100 (no importa el valor de **y**) con **Move , x=100, <Enter>**.

Pulsa **<F3>** y observa el valor de la **y**. Te debe quedar como la figura:



Con **Move, x=100000, <Enter>**, mueve la cruz al punto x=100000. Pulsa **<F3>** hasta que aparezca la gráfica de la función. Te debe quedar así:



Observa los valores de **x** e **y** en la línea inferior. *¿Sabes ahora cuál es* $\lim_{x \to +\infty} f(x)$ *?*

Construye la tabla LIM_INFINITO(10^5, 10^6, 2.(10^5)) *¿Confirma el estudio anterior?*

Siguiendo un proceso análogo, *¿Cuál es* $\lim_{x \to -\infty} f(x)$ *?*

***Ejemplo** 7.- Sean las funciones:* $\frac{1}{x^2}, \frac{4}{x^3}, -\frac{2}{x}, \frac{1}{x^{\frac{1}{3}}}$

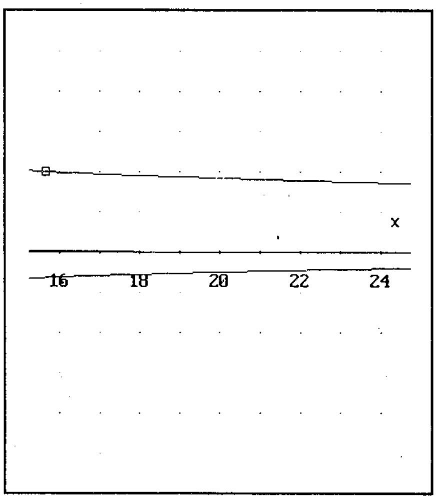
¿Encuentras alguna similitud en ellas?

Para representarlas gráficamente de una forma simultánea, escribimos en **Author** la expresión:

[**1/ x^2, 4/ x^3, -2/ x, 1/ x^(1/3)**] , es decir, las ponemos como si fuera un VECTOR.

Una vez resaltada la expresión , pulsamos **Plot**, y si no hemos borrado la gráfica anterior **Delete, All**, y por último **Plot.**

Vamos a mover la cruz al punto x=20, pulsa un par de veces <**F7**> para hacer un zoom hacia dentro en el eje vertical. Pulsa <**F3**> y los cursores de desplazamiento vertical. Observa que la cruz pasa de una función a otra. Ver figura:



¿Son valores pequeños los que toma la y en cada caso? ¿Hay poca diferencia entre ellos?

Mueve la cruz al punto (0,0) con **Move, x=0,<Tab>,y=0** y luego **Center**. Toma escalas cada vez mayores con **Scale, x=50,** (no importa la y) y **<Enter>.** Observa las gráficas.

Repite el mismo proceso con **Scale, x=100,** (no importa la **y**) y **<Enter>**. Observa las gráficas.

Por último, observa las gráficas con **Scale, x=10000,** (no importa la **y**) y **<Enter>**

¿Qué ocurre con las funciones? ¿Qué pasará cuando x->+∞ en cada caso? ¿Qué conclusiones generales puedes sacar?

Por último, un ejemplo un tanto difícil pero que nos puede dar una idea de las grandes posibilidades del DERIVE.

*Hallar los valores de los parámetros **a** y **b** y el valor de **f(0)** para*

que la función: $f(x)\begin{cases} \dfrac{\text{sen}^2 x}{ax^2} & \text{si } x<0 \\ bx^{x} & \text{si } 0<x\ 1 \\ e^{\frac{1}{1-x}}\ x & \text{si } x>1 \end{cases}$ *sea continua*

En **Author** escribimos F(x):=IF(x<=0,sin^2(x)/(ax^2),IF(x>=1,ê^(1/(1-x))+x, b x^x)) y **<Enter>**

Es necesario poner los símbolos "<=": menor o igual; y ">=": mayor o igual para que cuando se obtengan los valores pedidos y se quiera hacer la representación gráfica, las curvas queden bien definidas en los extremos de sus dominios. (El nº **e** se escribe **<Alt>** + **<e>**)

En **Author** escribimos:

LIM(F(x), x ,0 ,-1) (*que es el lím. por la izqda.. en el punto 0)* y luego **approX** o **Simplify** y nos da como resultado *1/a*. (Ver líneas #8 y #9)

Después **Author** y escribimos:

LIM(F(x), x ,0 ,1) y **approX** y el resultado es *b*. (Ver líneas #10 y #11)

$$\#1:\quad F(x) := IF\left[x \le 0,\ \frac{SIN(x)^2}{a\cdot x^2},\ IF(x \ge 1,\ ê^{1/(1-x)} + x,\ b\cdot x^x)\right]$$

$$\#8:\quad \lim_{x\to 0-} F(x)$$

$$\#9:\quad \frac{1}{a}$$

$$\#10:\quad \lim_{x\to 0+} F(x)$$

$$\#11:\quad b$$

Luego para que la función tenga límite en x=0 debe ser $\frac{1}{a}$ b.

En **Author** escribimos:

LIM(F(x),x,1,-1) y luego **approX** y nos da como resultado *b*. (Ver líneas #6 y #7)

$$\#6:\quad \lim_{x\to 1-} F(x)$$

$$\#7:\quad b$$

$$\#8:\quad \lim_{x\to 1+} F(x)$$

$$\#9:\quad 1$$

Después **Author** y escribimos:

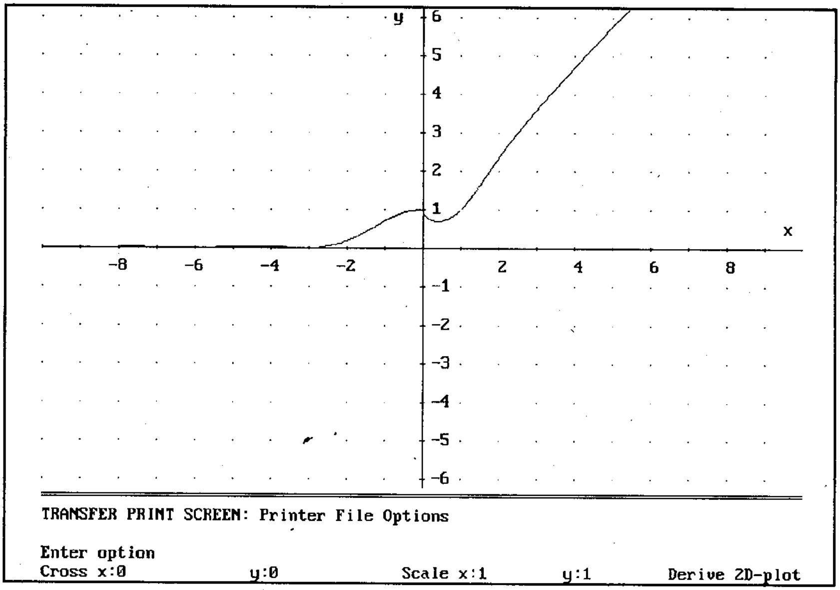
LIM(F(x),x,1,1) y **approX** y el resultado es *1*. (Ver líneas #8 y #9)

Luego para que la función tenga límite en x=1 debe ser b=1, luego, para que sea continua en x=0, debe ser a=1 y f(0)=1

Para representar la función y corroborar lo anterior debemos sustituir *a* y *b* por los valores obtenidos anteriormente. En vez de editar de nuevo la función y corregirla con **Author** y **<F3>**, corregir y **<Enter>**, podemos hacer **Manage, Substitute**, y nos pide primero la expresión resaltada por su número (si no corresponde, cambiamos el número, *acordarse de la* #); después nos pide que sustituyamos la variable **x**, para que no lo haga, pulsamos **<Enter>**; después nos pedirá la sustitución de la variable **a**, ponemos **1** en vez de **a**; y por último, la variable **b**, ponemos **1** en vez de **b**. Pulsamos **<Enter>** y vemos que nos aparece la expresión con los valores que hemos sustituido

$$\#10:\quad F(x) := IF\left[x \le 0,\ \frac{SIN(x)^2}{1\cdot x^2},\ IF(x \ge 1,\ ê^{1/(1-x)} + x,\ 1\cdot x^x)\right]$$

Resaltada esta nueva expresión, pulsamos **Plot**, **Overlay, Plot** y nos debe aparecer una gráfica como la que sigue:



SUCESIONES

Desgraciadamente, aunque DERIVE permite declarar una variable como entera positiva, a la hora de calcular imágenes o representar gráficamente una función que dependa de ella, la toma como real. Eso es un obstáculo para el tratamiento de las sucesiones. Lo único que podemos hacer, por lo menos lo único que se me ocurre, es construir un VECTOR de forma que sólo tome valores enteros.

Así, si queremos representar gráficamente la sucesión $a_n = \dfrac{2n+1}{n+3}$ y estudiar su comportamiento para valores grandes de **n**, tenemos que hacer lo siguiente:

1.- En **Author** escribimos *a(n):=* y **<Enter>**

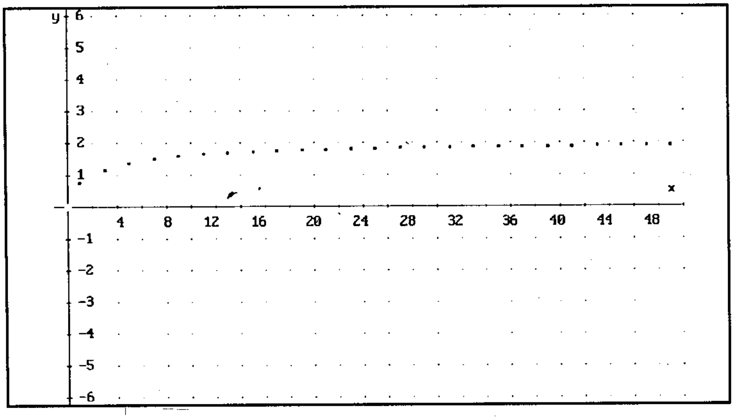
2.- En **Author** escribimos *SUCES(i, m, s):=VECTOR([n, a(n)], n, i, m, s)*

Donde **i**= valor inferior, **m**= valor superior, y **s**= paso o salto de un valor al siguiente

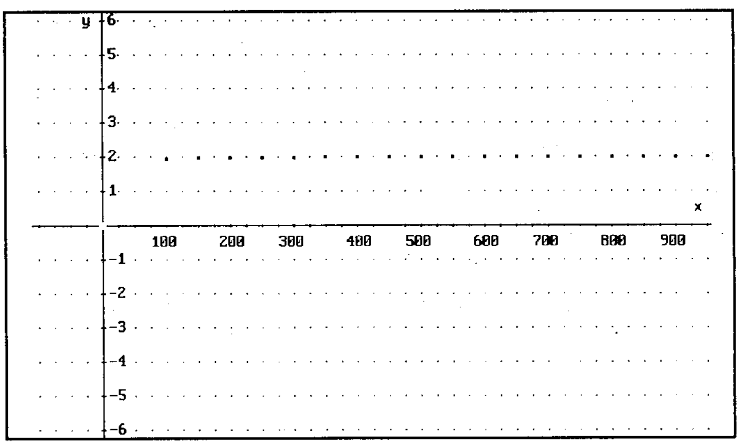
Luego pondremos en **Author** a(n):= (2n+1) /(n+3) y **<Enter>**
y **Author**, SUCES(1, 50, 5)

Luego **Simplify**, y haciendo **Plot** sobre la tabla que aparece, **Overlay**, **Plot** (fijarse que en **Options, State, Mode** sea **Discrete** (debe figurar entre paréntesis) y **Size** sea **Large** para que dibuje los puntos sin unirlos y de un tamaño más grande) luego **Plot** y debe quedar una gráfica como la de la figura cambiando la escala con **Scale, x=5, <Tab>, y=1**, y el rango con **Range,**

Left=-1



Si hacemos SUCES(100,1000,50) y simplificamos y dibujamos la tabla resultante, nos aparecerá, con la escala x=25, y=1, la figura:



Una sucesión definida por recurrencia, se puede hacer en DERIVE como indica el ejemplo del cuadro siguiente (Fibonacci)

```
#1:  F(n) := IF(n = 1, 1, IF(n = 2, 1, F(n - 1) + F(n - 2)))

#2:  FIB(n) := VECTOR([j, F(j)], j, 1, n)

#3:  FIB(10)

       ┌ 1   1 ┐
       │ 2   1 │
       │ 3   2 │
       │ 4   3 │
       │ 5   5 │
#4:    │ 6   8 │
       │ 7  13 │
       │ 8  21 │
       │ 9  34 │
       └10  55 ┘
```

ALGUNOS TRUCOS Y CONSEJOS

- Para representar una recta vertical hay dos maneras: una es ponerla en paramétricas (p.e., la recta **x=2** se pondrá en **Author** de la forma **[2,t]**. Usando **Plot, Plot** sobre la expresión, nos pedirá que digamos el rango de **t** (inicialmente desde -π hasta π)); otra forma es poner dos puntos de la recta en **Author** de la forma **[[2, -4],[2, 4]]** (es decir, como un vector de vectores) y usar **Plot**, **Options, State, Mode=Connected,** y por último, **Plot**.

- Para definir una función, es necesario incluir aquellos parámetros que vayamos a utilizar. P.e., si quiero que me calcule una serie de términos de una sucesión, desde un valor inferior hasta uno superior y con un paso o salto determinado, tendré que poner entre paréntesis junto al nombre que quiera darle, los parámetros. Así, en el ejemplo de sucesiones, definíamos la función:

SUCES(i, m, s) :=