NÚMEROS
Revista de didáctica de las matemáticas
N° 29, marzo de 1997, págs. 5-18

La enseñanza de los números negativos: aportaciones de una investigación

Alicia Bruno

En este trabajo se presentan las principales ideas teóricas, conclusiones e implicaciones didácticas de una investigación realizada con alumnos de 12-13 años de edad sobre la enseñanza de los números negativos (*).

La introducción de los números negativos se ha realizado tradicionalmente en nuestro país alrededor de los 12-13 años, en el séptimo curso de la antigua Educación General Básica o en los primeros de la actual Educación Secundaria. Los profesores de estos niveles y numerosas investigaciones (Vergnaud y Durand, 1976; Küchemann, 1981; Vergnaud, 1982; Conne, 1985; Bell, 1986) han puesto de manifiesto determinadas dificultades de los alumnos al utilizar estos números, las cuales invitaban a realizar una investigación sobre cómo enfocar el proceso de enseñanza de estos números y las actividades a seguir por los alumnos en su aprendizaje. La revisión de los trabajos de investigación nos llevaron a formular, poner en práctica y analizar una propuesta de enseñanza de los números negativos, que sin pretender estar cerrada o ser definitiva, nos ayudó a profundizar, un poco más, en cómo los alumnos manejan estos números.

Se resumen en estas páginas las principales ideas teóricas, junto con algunos resultados obtenidos a través de dos experiencias realizadas con alumnos de séptimo de EGB, durante los cursos 1992-93 y 93-94. Los alumnos siguieron un material preparado para la investigación, respondieron a varias pruebas escritas y algunos de ellos fueron entrevistados, con el fin de profundizar en ciertos aspectos.

(*) *La Enseñanza de los números negativos desde un pespectiva unitaria.* Tesis doctoral. Departamento de Análisis Matemático (Área de Didáctica de las Matemáticas). Universidad de La Laguna

1. Una visión unitaria de la enseñanza de los números

En el proceso de enseñanza de los números a lo largo de la primaria y secundaria nos parece adecuado tener en cuenta lo que hemos denominado la *visión unitaria de la enseñanza de los números*, la cual resumimos en lo que sigue.

Lo que se aprende acerca de los números, tanto en los primeros años como cuando se cursa la Educación Secundaria Obligatoria, forma parte de un único *conocimiento numérico,* que debe tener un hilo conductor que lo unifique y lo haga homogéneo. Es necesario conectar los conjuntos numéricos, de forma que los alumnos no construyan un conocimiento de los números como núcleos aislados. Una anécdota puede ilustrar cómo algunos alumnos, al estudiar un nuevo conjunto numérico olvidan, al menos temporalmente, los números que ya conocían: una profesora de Primaria, tal como hacía el libro de texto, había definido el conjunto de los enteros mediante

$$\mathbb{Z} = \{..., -3, -2, -1, 0, +1, +2, +3, ...\};$$

ante un ejercicio en el que se pedía dibujar unos ejes coordenados y representar los puntos (+4,+3), (-4,-2), (-1,+8), (1,3), un alumno dijo "el (1,3) no lo puedo representar porque no lo hemos estudiado".

El conocimiento numérico abarca diversos aspectos relativos a los números. Nos parece relevante trabajar con los alumnos tres de estos aspectos que hemos denominado *dimensiones*: *abstracta*, *de recta* y *contextual*.

En la *dimensión abstracta* se sitúan los conocimientos referidos a los sistemas numéricos como estructuras matemáticas y las formas de escritura de los números.

En la *dimensión de recta* se ubica la representación de los números sobre una recta, basada en la identificación de los números reales con los puntos de la recta y con vectores en la misma.

En la *dimensión contextual* se encuentran las utilidades y usos de los números.

El *conocimiento numérico* no se limita al conocimiento de las tres dimensiones, sino también abarca las *transferencias* entre ellas, es decir, la expresión en una dimensión de un conocimiento dado en otra. Gráficamente podemos representar esta última idea con el siguiente triángulo en el que las seis flechas uniendo los vértices indican las transferencias de una dimensión a otra (Figura 1).

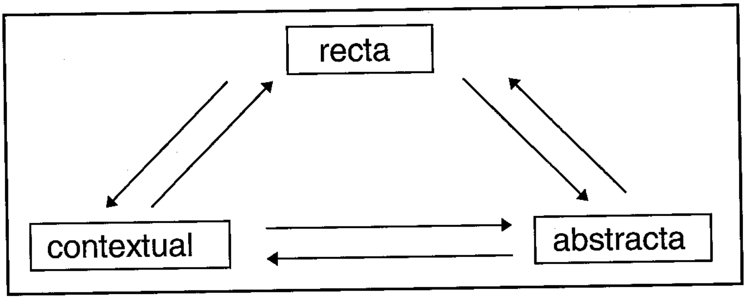
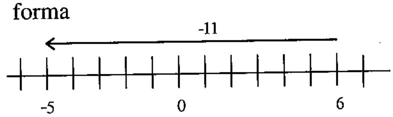
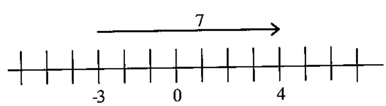


Figura 1. Transferencias entre las dimensiones

Veamos en la tabla 1 ejemplos de actividades para cada una de las transferencias.

Tabla 1. Actividades sobre cada una de las transferencias

transferencia abstracto → recta Representa en la recta la operación: –4+10=6	**transferencia recta→ abstracto** Dime una <u>operación</u> que pueda ser representada en la recta de la siguiente forma 
transferencia abstracto → contextual Dime una <u>situación</u> que pueda ser resuelta con la siguiente operación: –4+7=3	**transferencia contextual → abstracto** Dime una <u>operación</u> que pueda resolver la siguiente situación: *La temperatura en Madrid es de 9 grados sobre cero. En París hay 12 grados menos que en Madrid. ¿Cuál es la temperatura en París?*
transferencia contextual → recta Representa la siguiente situación en la recta *Un ascensor estaba en el piso 5 del sótano y subió 7 pisos. ¿Cuál era la posición del ascensor después de esta subida?*	**transferencia recta → contextual** Dime una <u>situación</u> que pueda ser representada de la siguiente forma: 

El inicio del aprendizaje numérico se produce en el sistema de los números enteros no negativos y concluye con el de los números reales (no prestamos atención a los números complejos). Varios son los caminos posibles a recorrer; es decir, varias son las*secuencias de extensiones*que podrían realizarse, tal y como se observa en el siguiente esquema

$$\begin{array}{ccccc} Z_+ & \longrightarrow & Q_+ & \longrightarrow & R_+ \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ Z & \longrightarrow & Q & \longrightarrow & R \end{array}$$

El estudio de una ampliación debe situarse en una de las secuencias posibles, para tener presente lo ya conocido y lo que aún queda por aprender. Parece adecuado realizar secuencias de extensiones que avancen hacia los números reales como:

$$Z_+ \longrightarrow Z \longrightarrow Q \longrightarrow R\ ,$$
$$Z_+ \longrightarrow Q_+ \longrightarrow Q \longrightarrow R\ ,$$
$$Z_+ \longrightarrow Q_+ \longrightarrow R_+ \longrightarrow R,$$

En cada ampliación numérica deben considerarse las tres dimensiones; en particular, debe utilizarse, entre otros, un significado común a todas las clases de números y eso se logra con la medida de magnitudes reales relativas.

2. Los números negativos desde la visión unitaria

La visión unitaria descrita anteriormente, la concretamos para el caso de los números negativos. De esta forma, entendemos una enseñanza de los números negativos que considere las tres dimensiones, y que siga una secuencia de extensiones que avance hacia los números reales. Estas ideas nos llevaron a plantear diversas cuestiones de investigación, a su posterior experimentación en el aula y a la obtención de conclusiones. Todo ello se presenta unificado en este apartado.

Introducir los números negativos supone ampliar un sistema numérico A, que los alumnos conocen, a un nuevo sistema numérico que lo contiene, que denominaremos *sistema de diferencias de* A y que notaremos por dA.

La secuencia de extensiones

¿Cómo debe presentarse a los alumnos la extensión a los números negativos?, ¿cuál debe ser el conjunto *A* inicial?

La secuencia de extensiones que se realizaba hasta hace poco tiempo en España es la siguiente

$$\begin{tikzcd} Z_+ \arrow[r, "1"] \arrow[d, "2"'] & Q_+ \arrow[d, "3"'] & \\ Z \arrow[r, "3"] & Q \arrow[r, "4"] & R \end{tikzcd}$$

Obsérvese que se produce una discontinuidad en el momento de introducir los números negativos, ya que durante el período de tiempo que se trabajan los números enteros se abandonan los números racionales. Es decir, de pronto, durante unos meses los números racionales desaparecen de las actividades de los alumnos, lo cual puede producir que algunos alumnos no integren correctamente los conjuntos numéricos que conocen hasta ese momento.

Esto nos llevó a nuestra primera cuestión de investigación. De las posibles secuencias de extensiones que avanzan hacia R, expuestas en el apartado anterior, optamos por seguir *formalmente* la secuencia

$$Z_+ \to Q_+ \to R_+ \to R.$$

y estudiamos si tal extensión produce en los alumnos un peor conocimiento de los números enteros que el que adquieren los alumnos que siguen la extensión $Z_+ \to Z$. Decimos "formalmente" porque el principal trabajo en el aula y el análisis de resultados lo hemos centrado en Q. Por lo tanto, en la introducción de los números negativos no hicimos hincapié en el conjunto de los números enteros sino que hablamos a los alumnos de los números opuestos a los que ya conocían, centrando las actividades en los números decimales.

Los resultados mostraron que los alumnos que siguieron la secuencia

$$Z_+ \to Q_+ \to R_+ \to R ,$$

obtienen resultados similares a los que aprendieron los números negativos siguiendo la extensión $Z_+ \to Z$ en cuestiones con números enteros.

La principal conclusión a la que llegamos es que es posible realizar la extensión a los números negativos mostrándolos como *los opuestos de los números positivos que conozcan los alumnos en el momento de realizar la extensión*, sin poner el énfasis en la creación del conjunto numérico de los enteros.

Formas de introducir los números negativos

La forma habitual para introducir los números negativos en los libros de texto españoles es distinguir entre los números naturales $\mathbb{N}$ y los números enteros, definidos como los números naturales con un signo (positivo y negativo) $\mathbb{Z}$, para posteriormente indicar que los números enteros no negativos son isomorfos a los naturales. Desde nuestro punto de vista esto produce una ruptura innecesaria en el conocimiento de los alumnos, y algunos de ellos pueden encontrar los números $\{+1, +2, +3, ...\}$ de naturaleza diferente a los que ya conocían $\{1, 2, 3, ...\}$

Nuestra propuesta de enseñanza de los números se inclina por realizar las extensiones por *adjunción*. En el caso de la extensión a los números negativos, para cada $x \in A$ se considera un nuevo número, que se denota $-x$, siendo $-0 = 0$, así, $dA = \{-x : x \in A\} \cup A$. De este modo, no se escribirán los números positivos en la forma +1, +2, ..., sino que se escribirá, como siempre, 1, 2, ...

La identificación de la suma y la resta

En la dimensión abstracta, lo más relevante de la extensión de A a dA es que las nociones de suma y resta se identifican mediante el uso de la noción de opuesto de un número, es decir, $a-b=a+(-b)$ y $a+b=a-(-b)$.

En la dimensión contextual las ideas de suma y resta en A tienen significados contrarios: sumar es añadir, unir, ..., mientras que restar es quitar, separar, ... En el sistema numérico ampliado dA deben identificarse tales significados, de modo que sumar y restar se correspondan con la misma idea. Veamos esto con un ejemplo. En el sistema A ($= Z_+, Q_+, R_+$) los alumnos conocen un único tipo de suma ($2 + 3 = 5$) y uno sólo de resta ($5 - 3 = 2$). En el sistema extendido dA ($= Z, Q, R$) hay muchos otros tipos, cuyos cálculos requieren reglas específicas. Concretamente:

$2 + 3 = 5$	$2 - (-3) = 5$	$-2 + (-3) = -5$	$-2 - 3 = -5$
$3 + (-2) = 1$	$3 - 2 = 1$	$-3 + 2 = -1$	$-3 - (-2) = -1$
$2 + (-3) = -1$	$2 - 3 = -1$	$-2 + 3 = 1$	$-2 - (-3) = 1$

En la dimensión contextual dentro del sistema A, la primera igualdad de la primera línea (2+3=5) se corresponde con situaciones como

Juan tenía 2 pesetas y ganó 3; Juan ahora tiene 5 pesetas , mientras que la segunda igualdad de la misma línea (2 - (-3) = 5) se asocia a situaciones como la siguiente:

Juan tenía 2 pesetas y perdió -3; Juan ahora tiene 5 pesetas.

En el sistema ampliado d*A* se deben integrar ambas igualdades en un mismo significado, lo que lleva a considerar que

"ganó 3" es equivalente a "perdió -3" .

Una misma situación puede expresarse de dos formas distintas, lo que supone, dentro de la dimensión contextual, que "sumar 3" y "restar -3" es lo mismo (Bruno y Martinón, 1996).

En la investigación realizada con los alumnos se trató de conocer de que forma lograban la identificación de las dos operaciones, en la dimensión contextual. Comprobamos que es complejo que los alumnos identifiquen las dos operaciones en la dimensión contextual, y no tanto en la dimensión abstracta. Pocos alumnos, en especial aquellos que obtenían mejores resulfados en todos los aspectos de los números negativos, fueron los que llegaron a comprender la identificación de las dos operaciones. La causa de ello fue que las ideas previas sobre el significado de las dos operaciones, como algo contrapuesto, son las que predominan y están muy arraigadas en el conocimiento de los alumnos.

La resolución de problemas aditivos

Los problemas aditivos juegan un papel importante en una enseñanza de los números negativos que considere la dimensión contextual, ya que a través de su resolución puede trabajarse la identificación de la suma y la resta, y pueden utilizarse como medio para llegar a comprender la operatoria, hacer surgir las propiedades y las reglas que rigen a los números negativos. Por otro lado, con los números negativos pueden plantearse problemas con similar estructura que con los números positivos, por lo que los problemas se convierten en otro elemento unificador de la enseñanza numérica.

Fijamos la atención en tres aspectos relativos a los problemas aditivos: *estructura, posición de la incógnita* y *contexto.*

Cuatro son las estructuras que se consideran en este trabajo:

- e + e = e: estado parcial 1 + estado parcial 2 = estado total.
  Ejemplo: Juan tiene 2 pesetas en el banco y debe 3 a la caja de ahorros. ¿Cuál es su situación económica total?
- e + v = e: estado inicial + variación = estado final.

Ejemplo: Juan tenía 2 pesetas por la mañana y perdió 3 pesetas a lo largo del día. ¿Cuántas pesetas tenía por la noche?

- e + c = e: estado 1 + comparación = estado 2.
  Ejemplo: Juan tiene 2 pesetas y Pedro tiene 3 pesetas menos que Juan. ¿Cuántas pesetas tiene Pedro?
- v + v = v: variación parcial 1 + variación parcial 2 = variación total.
  Ejemplo: Juan gana 2 pesetas por la mañana y pierde 3 pesetas por la tarde. ¿Cuántas pesetas ganó Juan a lo largo del día?

Una misma estructura da lugar a varios problemas según cual sea la incógnita. Por ejemplo, con la estructura e + v = e pueden plantearse tres problemas:

$$? + v = e \quad , \qquad e + ? = e \quad , \qquad e + v = ? \,,$$

que se llamarán de incógnita 1 (I1), de incógnita 2 (I2) y de incógnita 3 (I3), respectivamente. Veamos un ejemplo de cada una.

- Incógnita 1 (I1)
  Después de perder 3 pesetas a lo largo del día, Juan debía 1 peseta por la noche. ¿Cuántas pesetas tenía por la mañana?
- Incógnita 2 (I2)
  Juan por la mañana tenía 2 pesetas y por la noche debía 1 pesetas. ¿Cuánto perdió a lo largo del día?
- Incógnita 3 (I3)
  Juan tenía 2 pesetas por la mañana y perdió 3 pesetas a lo largo del día. ¿Cuántas pesetas tenía por la noche?

Dos problemas con la misma estructura y la misma posición de la incógnita pueden presentar diferentes contextos. Por ejemplo,

Contexto *deber-tener*

Juan tiene 2 pesetas y Pedro tiene 3 pesetas menos que Juan ¿Cuántas pesetas tiene Pedro? (problema de estructura e + c =e (I3)).

Contexto *cronología*

Juan nació el año 2 después de Cristo y Pedro 3 años antes. ¿En que año nació Pedro? (problema de estructura e + c =e, incógnita (I3)).

Se pueden considerar distintos contextos al tratar los números negativos. En este trabajo estudiamos seis contextos: *deber-tener, cronología, temperatura, nivel del mar, carretera* y *ascensor*, que son los más frecuentemente en los libros de texto españoles.

En esta investigación estudiamos cómo influyen el contexto, la estructura y la posición de la incógnita en la resolución de estos problemas. Además, analizamos el papel de la recta en la resolución de problemas y su influencia en la comprensión de los problemas aditivos con números negativos.

Se concluye que la dificultad de los problemas aditivos con números negativos está determinada por la posición de la incógnita más que por el contexto y por la estructura, siendo los problemas de incógnita 1 y 2 más complejos que los de incógnita 3.

Por el contrario, el uso de la recta depende más del contexto que de la estructura o de la posición de la incógnita. Se observa un menor uso de la recta en los contextos *deber-tener* y *cronología*, mientras que aumenta el uso de la recta en el contexto*carretera*. La recta presenta más dificultades en los problemas con números decimales y en los de estructura v+v=v (I3), en estos último por la tendencia de los alumnos a dar la solución del problema con un estado (Bruno y Martinón, 1994a).

Los alumnos mostraron más éxito cuando resolvían los problemas con la recta que con la operación. En los problemas de incógnita 3 fue relativamente sencillo plantear una operación con números negativos, pero en los problemas de incógnita 1 y 2 la operación se planteó erróneamente en muchos casos.

Además, los alumnos tenían más seguridad en los resultados que encuentran en la recta que aquellos que obtienen a través de las operaciones. Así, al obtener resultados diferentes en la recta y con la operación el resultado que intentan modificar siempre es el de la operación.

Los contextos y las estructuras que usan los alumnos

Antes de introducir los números negativos, cuando se les pide a los alumnos que inventen problemas que den significado a operaciones de suma y resta con números positivos observamos que emplean mayoritariamente situaciones en el contexto*deber-tener* y con estructuras e+e=e (I3), y e+v = e (I3) para las sumas, y con estructuras e+v=e (I3) para las restas.

Después de trabajar con los números negativos con el material que realizamos, al inventar problemas, sigue predominando el contexto *deber-tener*. Por el contrario, el contexto *cronología* es el menos usado por los alumnos, mientras que el resto de los contextos lo usan en algunas ocasiones. En cuanto a las estructuras continúan empleando las situaciones e+e=e (I3), y e+v=e (I3). Lo más destacable es la ausencia de las comparaciones.

Cuando se muestra a los alumnos una representación en la recta y se les pide inventar una situación o problema, el contexto *deber-tener* desaparece en favor del resto de contextos, *temperatura, nivel, del* mar, etc., salvo el de *cronología* que tampoco se emplea en estos casos. En estos casos aumentan las problemas que no empleaban con los números positivos, como v+v=v (I3), y problemas de incógnita 1 y 2. Por lo tanto, la recta induce a utilizar situaciones con estructuras y contextos diferentes, que no surgen si la posición de partida es la dimensión abstracta.

La recta

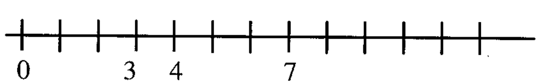
En la extensión a los números negativos la recta favorece la comprensión y la necesidad de "adjuntar" nuevos números a la izquierda de cero, y no presenta dificultades la extensión hacia la izquierda del cero una vez que ha surgido la necesidad de estos nuevos números en la dimensión abstracta y contextual.

Por lo tanto, las actividades en las dimensiones abstracta y contextual deben tener su reflejo en la recta.

Nos planteamos profundizar en el uso de la recta cuando se trabaja con números negativos, haciendo uso de la representación puntual y de la vectorial.

Comprobamos que las representaciones en la recta eran casi desconocidas para los alumnos que participaron en nuestras experiencias antes de introducir los números negativos. Esto quedó patente cuando les pedíamos representar gráficamente operaciones abstractas de suma y resta, como 3+4=7 o 7-5=2. Vimos que los alumnos prefieren realizar otras representaciones basadas en modelos discretos de la suma y resta, como los diagramas de Venn, y los que optan por representar las operaciones en la recta mostraron muchas dificultades (Bruno y Martinón, 1994b). Un ejemplo de un tipo de respuesta de los alumnos en estos casos fue

3 + 4 = 7



Obsérvese que se representan los tres números sin ninguna relación entre ellos. Algunos de nuestros resultados coincidieron con los obtenidos por Carr y Katterns (1984).

La recta necesita un trabajo directo en el aula, ya que una vez familiarizados con ella a través del estudio de los números negativos, desaparecieron muchos de los errores manifestados previamente.

Los resultados de algunas investigaciones aconsejan el abandono de la recta como modelo para la enseñanza de los números negativos (Küchemann, 1981; Liebeck, 1990). Sin embargo, estos trabajos se han realizado utilizando la recta como modelo descontextualizado o sin un trabajo previo y profundo conectándola a situaciones concretas. En esta investigación las actividades desde el inicio relacionaban la recta con a las situaciones concretas y observamos que la recta es una ayuda primordial en la resolución de problemas y muchas veces fue el puente entre las dimensiones contextual y abstracta. La recta se usa generalmente bien cuando el alumno está en una situación de la dimensión contextual.

Las transferencias entre las dimensiones

Las transferencias entre las tres dimensiones deben ser de tal modo que las reglas operatorias nuevas, que se sitúan en la dimensión abstracta, tengan una clara traslación en las dimensiones contextual y de recta.

Es necesario observar que en las actividades que realizan los alumnos suelen predominar ciertas transferencias. Por ejemplo, las transferencias de la dimensión contextual a la abstracta, los alumnos suelen resolver muchos problemas aritméticos planteando operaciones, pero no están acostumbrados a redactar o inventar problemas que se resuelvan con una determinada operación. Parece necesario, por lo tanto, poner más énfasis en determinadas transferencias que normalmente se realizan de forma tangencial.

En esta investigación, los alumnos realizaron muchas actividades de transferencias. Un análisis de las mismas llevó a concluir que la facilidad para realizar las transferencias está determinada por el tipo de actividad; por ejemplo, es más fácil transferir a las otras dimensiones una situación concreta aditiva de incógnita 3, que una de incógnita 1 o 2. Además, encontramos una asimetría en las transferencias entre las dimensiones contextual y abstracta: para los alumnos participantes en nuestras experiencias resultó más difícil pasar de lo abstracto a lo contextual que de lo contextual a lo abstracto.

Por otro lado, les resultó más fácil llegar a la representación en la recta desde lo contextual que desde lo abstracto, y les resultó más fácil llegar a lo contextual desde la recta que desde lo abstracto. A la mayoría de ellos les resultó más fácil llegar a lo abstracto desde lo contextual que desde la recta. Esto indica que para los alumnos es más clara la representación de situaciones concretas en la recta que pasar a un lenguaje abstracto esas situaciones. Estos resultados se resumen en la figura 2, donde se señalan las transferencias que resultaron más fáciles para los alumnos

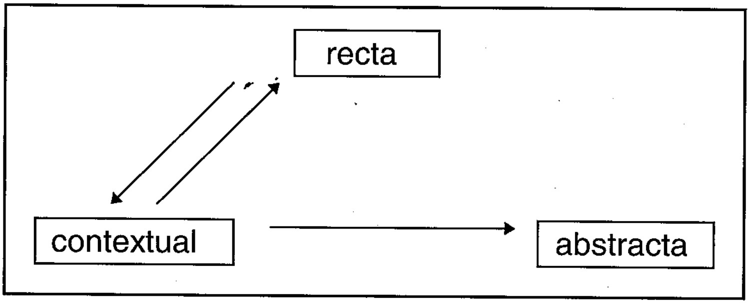


Figura 2. Transferencias que establecen los alumnos con más facilidad

3. Conclusiones

Las anteriores resultados invitan a modificar los habituales currículos. Parece adecuada una enseñanza de los números enteros no negativos y los racionales no negativos que utilice las tres dimensiones. Estas dimensiones deben seguir siendo las protagonistas en la enseñanza de los números negativos. Si abandonamos la dimensión contextual en la enseñanza de los números negativos dejaríamos a estos sin los significados que realmente tienen en la vida real, y se produciría un cambio en el tipo de enseñanza numérica que hasta entonces han recibido los alumnos.

Hay algunas dificultades que surgen en la enseñanza de los números negativos que son consecuencia del conocimiento previo sobre los positivos, y que un trabajo específico con los positivos las evitaría o disminuiría. Por ejemplo, las ya comentadas sobre el énfasis que se suele poner en las transferencias de lo contextual a lo abstracto y la casi ausencia de actividades que impliquen pasar de lo abstracto a lo contextual. También hay problemas aditivos que presentan dificultad a los alumnos y en los que se hace necesario un trabajo más profundo con los números positivos, como los problemas con estructuras v+v=v y e+c=e y los de incógnita 1 y 2.

La familiaridad de los alumnos con el contexto *deber-tener* antes de introducir los números negativos lleva a considerarlo como un contexto apropiado para introducirlos. En contraposición, el contexto *cronología* necesita de un trabajo específico de vocabulario, así como de comprensión de las situaciones temporales (antes/después de Cristo, años vividos, etc.). La poca relación real de los dos contextos citados con la representación en la recta hace necesario el uso de otros contextos más relacionados con la recta como *carretera*, *nivel del mar* o *ascensor*.

Las estructuras aditivas más fáciles de entender y que se representan con más facilidad en la recta y con operaciones son las que corresponden a e+v=e (I3). Los problemas de estas estructuras y posición de la incógnita permiten que las transferencias entre las dimensiones sean efectivas, por lo que pueden ser una buena manera de iniciar estas operaciones.

Nuestros resultados indican que la recta se hace necesaria si se desea trabajar los problemas aditivos con números negativos, ya que en mucho casos, es la ayuda que los alumnos necesitan para llegar a plantear y comprender las operaciones. Por otro lado, no parece adecuado utilizar la recta desconectada de las situaciones concretas.

Aunque en este trabajo no hemos profundizado en las actividades de multiplicación y división, nos parece adecuado un enfoque de estas operaciones que siga la misma metodología que el resto de la enseñanza de los números negativos, en concreto, la representación en la recta y en el uso de situaciones concretas.

4. Bibliografía

Bell, A. (1986). Enseñanza por diagnóstico. Algunos problemas sobre números enteros. *Enseñanza de las Ciencias*, 4(3), 199-208.

Bruno, A.; Martinón, A. (1994a). Contextos y estructuras en el aprendizaje de los números negativos. *Suma*, 16, 9-18.

Bruno, A.; Martinón, A. (1994b). La recta en el aprendizaje de los números negativos. *Suma*, 18, 39-48.

Bruno, A.; Martinón, A. (1996). Números negativos: sumar = restar. *Uno*, 10, 123-132.

Carr, K.; Katterns, B. (1984). Does the number line help?. *Mathematics in School*, 13, 4, 30-34.

Conne, F. (1985). Calculs numériques et calculs relationnels dans la resolution de problèmes d'arithmetique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 5, 3, 269-332.

Küchemann, D. E. (1981). Positive and negative number. En Hart,K. (ed.) *Children's Understanding of Mathematics: 11-16*, 82-87. John Murray. London.

Liebeck, P. (1990). Scores and forfeits - an intuitive model for integer arihmetic. *Educational Studies in Mathematics*, 21, 221-239.

Vergnaud, G. (1982). A classification of cognitive tasks and operations of thought involved in addition and subtraction problems. En Carpenter, T.; Moser, J, Romberg, T. (eds.). *Addition and subtraction: A cognitive perspective*. LEA. New Jersey.

Vergnaud, G.; Durand, C. (1976). Structures additives et complexité psychogénétique. *La Revue Française de Pédagogie*, 36, 28-43.

Alicia Bruno Castañeda
Departamento de Análisis Matemático
(Area de Didáctica de las Matemáticas)
Universidad de La Laguna
38271 La Laguna (Tenerife)
abruno@ull.es