

NÚMEROS

Revista de didáctica de las matemáticas

Nº 29, marzo de 1997, págs. 19-34

La resolución de problemas aritméticos verbales y los sistemas de representación semióticos

Josefa Hernández Domínguez

En este trabajo recogemos un breve resumen de la Tesis Doctoral "Sobre habilidades en la resolución de problemas aritméticos verbales, mediante el uso de dos sistemas de representación yuxtapuestos" que, bajo la dirección de los Doctores D. Martín M. Socas Robayna y D. Nácere Hayek Calil, he realizado en el Área de Didáctica de las Matemáticas del Departamento de Análisis Matemático.

Algunos de los resultados más relevantes, así como las implicaciones para la enseñanza que presentamos, a continuación, de manera global, han sido ya publicados, en ellos no nos extenderemos sino que indicaremos las referencias de los mismos.

Tres grandes campos de investigación han sido considerados en este trabajo. El primero y principal tiene que ver con la resolución de problemas, el segundo con el dominio afectivo de los alumnos, concretamente con las actitudes, y el tercero con el profesorado.

En Matemáticas, la resolución de problemas representa el núcleo fundamental de la actividad matemática, y por ello no es de extrañar que constituya uno de los campos de investigación más importante en Educación Matemática.

Los problemas aritméticos constituyen una parte fundamental del currículo de Educación Primaria, sin embargo nuestras escuelas en su instrucción inciden fuertemente en los algoritmos y menos en el desarrollo de estrategias y en la maduración de procesos cognitivos superiores, tales como el nivel de razonamiento y la comprensión conceptual. La típica pregunta que hacen muchos alumnos en el aula cuando se enfrentan a resolver un problema aritmético verbal, "¿tengo que sumar o restar?",

refleja el objetivo de los problemas aritméticos escolares: la elección de una operación y su ejecución como fin fundamental de los mismos.

El importante papel que desempeñan las componentes afectivas en la enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas está siendo reconocido, tanto desde la óptica de la investigación, conectándose el dominio afectivo y cognitivo, como desde la óptica de la educación, incluyéndose en todas las Reformas Educativas como un factor fundamental.

Por último, la importancia del profesorado en la educación está fuera de toda duda. Investigaciones sobre su papel en la educación o la influencia que tienen sus creencias y concepciones sobre las Matemáticas, son campos, entre otros muchos, ampliamente estudiados. En esta investigación, nos centramos en el papel que desarrolla el profesor en la misma y de qué forma sus propias decisiones didácticas influyen en el desarrollo de un diseño instruccional, dentro de la investigación sobre el pensamiento y toma de decisiones.

Problema de investigación

La investigación se centra en los problemas aritméticos, y concretamente en aquellos cuyo enunciado es verbal. Estudiamos el comportamiento de los alumnos cuando son instruidos en un modelo de resolución de problemas que usa dos sistemas de representación semióticos yuxtapuestos, las actitudes que manifiestan hacia las matemáticas y hacia la resolución de problemas y la implicación del profesorado en un diseño de instrucción innovador que supone necesariamente un cambio curricular.

Comenzamos realizando una amplia revisión de la bibliografía sobre los tres aspectos reseñados. Esta revisión nos permitió centrar nuestra investigación, teniendo en cuenta la importancia del uso de sistemas de representación no verbales (De Corte y Verschaffel, 1985, Fuson y Willis (1989), la falta de más estudios sobre representaciones basadas en el esquema partes-todo (Fuson, 1992); la necesidad de contemplar las diferentes categorías semánticas (Carpenter y Moser, Riley, Heller y Greeno, Fuson, De Corte y otros, Puig y Cerdán, Bethencourt, Neshet, Rico y otros), tanto en la instrucción como en la investigación; la necesidad de abordar los aspectos cognitivos y afectivos conjuntamente, y la importancia de tener presente al profesorado, para analizar el papel que juega en la implementación de un microcurrículo.

De Corte (1993) apunta que las principales categorías de aptitudes

que subyacen a la resolución competente de problemas son: el conocimiento de ámbito específico, los métodos heurísticos, el conocimiento y las habilidades metacognitivas y las componentes afectivas.

Pretendemos diseñar un modelo de resolución de problemas que permita desarrollar habilidades cognitivas, metacognitivas y heurísticas en los alumnos, entendiendo por **habilidades cognitivas**, entre otras, las relacionadas con los conocimientos necesarios para resolver problemas, tales como comprender qué significado tiene cada una de las operaciones aritméticas, la ejecución de los algoritmos, la comprensión de los textos escritos, la discriminación entre los datos y la incógnita; las **habilidades metacognitivas**, las entendemos en el sentido de Nickerson, Perkin y Smith (1990), que las consideran como aquellas habilidades que son necesarias o útiles para la adquisición, el empleo y el control del conocimiento y de las demás habilidades cognitivas. Entre otras habilidades metacognitivas que han sido identificadas, están la planificación, la predicción, la verificación, la comprobación de la realidad y la supervisión y control de los intentos propios deliberados de llevar a cabo tareas intelectualmente exigentes; y las **habilidades heurísticas** como aquellas estrategias que se utilizan en los problemas aritméticos verbales.

El interés de nuestro análisis se centró, en primer lugar, en delimitar las potencialidades y dificultades que el uso de un sistema de representación visual-geométrico desarrolla en alumnos de 8 a 11 años. En segundo lugar, tratar de explicitar las habilidades cognitivas, metacognitivas y heurísticas que se ponen en juego cuando trabajamos con ambos sistemas yuxtapuestos (sistema de representación visual-geométrico y sistema formal aritmético). En tercer lugar, abordar los aspectos afectivos, concretamente las actitudes de los alumnos, y, finalmente, el pensamiento de los profesores y la toma de decisiones ante una propuesta curricular innovadora. Además, nuestro trabajo pretende, a nivel conceptual, aportar unos marcos teóricos locales, que permitan desarrollar modelos de competencias en los distintos campos relacionados con la problemática que implica la resolución de problemas aritméticos verbales en educación matemática.

Objetivos

Para la delimitación del estudio establecimos tres objetivos generales de la investigación:

- 1º) **Estudiar las habilidades cognitivas, heurísticas y metacognitivas, que los alumnos ponen en juego en la resolución de un problema aritmético verbal; ver cómo influye en ellos el aprendizaje de un modelo de competencia para resolver dichos problemas, con el uso de un nuevo sistema de representación no verbal para la resolución de problemas (sistema de representación visual-geométrico), y analizar qué tipo de conexión realizan con los esquemas tradicionales en los que han sido instruidos.**
- 2º) **Estudiar la actitud de los alumnos hacia las matemáticas y hacia la resolución de problemas, analizar si muestran diferencias entre ellas, y si se produce algún cambio de las actitudes hacia la resolución de problemas después del desarrollo del diseño.**
- 3º) **Observar la toma de decisiones en un grupo de profesores en activo, en un tópico como la resolución de problemas en un marco constructivista de las matemáticas y de carácter innovador, al implicarse directamente en una investigación.**

Elaboración de marcos locales interpretativos

Con el objeto de poder desarrollar la investigación nos hemos visto obligados a elaborar marcos locales interpretativos, en forma de modelos de competencias.

Modelo de investigación y desarrollo del currículo (Socas, Afonso, Hernández y Palarea, 1994): El modelo, basado en las triadas de Rachlin (1989) y en el modelo de Fennema, Carpenter y Peterson (1989), consta de tres triadas; la de los didactas (o investigadores), la de los profesores y la de los estudiantes, entre las cuales se producen interacciones; entre éstas destacamos el curso de preparación del profesorado en activo, mediante una técnica “de inmersión”, la instrucción desarrollada en el aula por los profesores y por el investigador y la interacción directa entre los alumnos y el investigador. Al mismo tiempo, se pretende superar las posiciones extremas entre los aspectos cualitativos y cuantitativos de los distintos paradigmas, utilizando técnicas de ambos que permiten entender mejor los procesos y resultados implicados en la investigación.

Modelo de competencias para la resolución de problemas aritméticos verbales (Hernández y Socas, 1994): El modelo para resolver problemas aritméticos verbales dirigido a los alumnos de Educación Primaria, surge de un análisis de los principales modelos desa-

rollados, está inspirado en el modelo de Polya (Polya, 1957) y en los sistemas de representación cognitivos de Goldin (Goldin, 1987, 1989).

Consta de 6 fases: Lectura del enunciado; comprensión; representación, ejecución y solución visual-geométrico (SRVG); representación, ejecución y solución formal (SA); soluciones obtenidas en ambos sistemas; comprobación de la solución.

El sistema de representación visual-geométrico (SRVG) (Noda, Hernández y Socas, 1996): Proponemos la utilización de un sistema, que hemos denominado Sistema de Representación Visual-Geométrico (SRVG), que permite al alumno hacer tanto elaboraciones sintácticas como semánticas.

El diseño de instrucción (DIRPA) pretende instruir a los alumnos en la resolución de problemas aritméticos verbales de una y dos operaciones, mediante el uso de dos sistemas de representación semióticos yuxtapuestos y utilizando el modelo de competencias citado.

Consta de 5 unidades, que se desarrollan en 20 sesiones, cada una de ellas contiene una introducción que realiza el profesor y actividades para los alumnos. Se recomienda desarrollarlo con una metodología activa y con trabajos en grupos.

El curso-guía al profesorado: El objetivo de este curso es introducir al profesorado en la investigación y darle a conocer el diseño de instrucción, pero con una técnica, que hemos denominado “por inmersión”, mediante la cual el profesorado actúa como si fueran alumnos desarrollando el diseño de igual manera. Simultáneamente se fue realizando una presentación de los objetivos del mismo y justificando sus diferentes aspectos en base a las investigaciones actuales. De esta forma se logran varios objetivos. Con relación al profesorado: conocer en profundidad el diseño que va a desarrollar y descubrir sus dificultades y sus ventajas, lo que le da una seguridad sobre lo que va a implantar y ponerse en contacto con las investigaciones actuales sobre el tema. Con relación al diseño: el desarrollo por inmersión nos permite una revisión del mismo en base a las reflexiones del profesor y una investigación sobre su implementación con personas adultas, que tienen interiorizadas estrategias y sistemas de representación para resolver los problemas.

Modelo de competencia para el campo conceptual aditivo (Socas, Hernández y Noda, 1996): De las dificultades observadas en la revisión

de la literatura y durante el desarrollo del diseño, nos surgió la idea de utilizar el esquema partes-todo, como elemento organizador de un modelo de competencia caracterizado por los elementos epistemológicos, fenomenológicos y cognitivos asociados al campo conceptual aditivo, que abordara tanto las magnitudes escalares absolutas como las discretas relativas, considerando al grupo aditivo y ordenado de los números enteros, como un buen modelo para los fenómenos que se dan en él y bajo el cual se pueden dar explicaciones homogéneas a las diferentes situaciones y problemas que se pueden plantear. Este estudio presenta una organización exhaustiva y aporta una nueva clasificación de las situaciones y problemas del dominio de aplicación del campo conceptual aditivo de las magnitudes discretas, basada en las cantidades, medidas y números enteros.

Desarrollo de la investigación empírica

En la investigación empírica podemos distinguir tres etapas importantes:

El estudio de grupos: Este estudio se desarrolla con 355 alumnos de 13 aulas de colegios de la Isla de Tenerife, actuando como grupo control 10 aulas y 190 alumnos de los cursos 3º, 4º y 5º de E.G.B. El diseño seguido es de tipo cuasi-experimental. Los alumnos reciben el diseño de instrucción reseñado, mientras el grupo control realiza problemas aritméticos de una batería confeccionada por el grupo de investigación, y que desarrollan con su metodología habitual.

El estudio de un aula: Se desarrolla con 24 alumnos del 2º nivel del Segundo Ciclo de Educación Primaria (equivalente a 4º de E.G.B.). En ella la investigadora desarrolla el mismo diseño de instrucción.

Las entrevistas: con 12 alumnos de 4º y 5º de EGB en un primer estudio piloto, y las entrevistas definitivas, con 9 alumnos de 2º nivel del Segundo Ciclo de Primaria

Métodos de recogida de datos: Podemos señalar como mas significativos los siguientes:

En el estudio cuantitativo

El pretest-postest para valorar el rendimiento en resolución de problemas, en la ejecución de las operaciones y en la invención de problemas. Consta de 19 problemas de una y dos operaciones, 6 operaciones para ejecutar y la invención de 6 problemas que se resuelvan

con estas operaciones. Se les administra antes y después del desarrollo del diseño.

Las escalas de actitudes hacia las Matemáticas y hacia la resolución de problemas. Son dos escalas paralelas de tipo Likert con 24 proposiciones cada una. Se les administran ambas antes del diseño, y la segunda se les vuelve a pasar después de su desarrollo.

Todos los datos cuantitativos fueron analizados mediante el paquete estadístico SYSTAT.

En el estudio cualitativo

♦ **Protocolos para las entrevistas con los alumnos, con la finalidad de analizar las habilidades cognitivas, metacognitivas y heurísticas de los alumnos durante la resolución de problemas.** Las entrevistas sobre la resolución de problemas por parte de los alumnos fueron videograbadas y posteriormente transcritas, y sobre ellas se analizaron las habilidades que los alumnos exteriorizaban durante la resolución de los mismos.

♦ **Protocolos cerrados para las entrevistas de los profesores.** Se desarrollaron tres entrevistas: una a los profesores del grupo experimental antes del diseño, y otra, a largo plazo (año y medio después de realizado éste) y la tercera, a los profesores del grupo control (después de la investigación).

Estos protocolos cerrados se estructuran en torno a cinco categorías: **Categoría DI**-Diferencias individuales, **Categoría LI**-Limitaciones institucionales, **Categoría NT**-Naturaleza de la tarea, **Categoría JP**-Juicio de los profesores sobre los estudiantes y sobre el contenido, **Categoría DD**-Decisiones pedagógicas; adaptadas del modelo de Shavelson y Stern (1981).

A las entrevistas a los profesores del grupo control se le añadió una nueva subcategoría dentro de la última: **Subcategoría DDI**- Decisiones didácticas inferidas, que tiende a recoger los cambios introducidos por dichos profesores al saberse involucrados en una investigación. Y en las de los profesores del grupo experimental, la segunda vez que se les administra, se añade también en la última categoría la siguiente subcategoría: **Subcategoría DDP**-Decisiones didácticas proyectadas, para evaluar las modificaciones que han introducido en su trabajo sobre la resolución de problemas después de haber experimentado el diseño.

Como otros instrumentos para la ecogida de datos podemos indicar:

las carpetas de los alumnos, los diarios de los profesores, encuesta a los alumnos sobre el sistema de representación y sobre la valoración del diseño, y cuestionarios de datos generales.

Resultados y conclusiones

Sobre los modelos de competencias

Con relación al campo conceptual de las magnitudes discretas, hemos elaborado una propuesta de organización, que constituye un modelo de competencia para dicho campo, que integra los elementos y relaciones que se dan en él, permite una nueva clasificación de las diferentes situaciones y problemas del mismo, integra y explica resultados de otras investigaciones y facilita la relación con un posible modelo de ejecución.

Con relación al modelo de competencia para la resolución de problemas aritméticos verbales, encontramos que este modelo favorece la comprensión de los problemas por parte de los niños, desarrollando habilidades y permitiéndoles resolver los problemas por medio de dos sistemas de representación semióticos.

Con relación al modelo de competencia para la investigación y desarrollo del currículo, pensamos que el modelo diseñado es un intento de aportar ideas sobre la implantación de un cambio curricular, que pretende, asimismo, superar las posiciones extremas entre los aspectos cualitativos y cuantitativos de los paradigmas de investigación y recoge técnicas de ambos en función de los tipos de estudio que se realicen.

Sobre la resolución de problemas

En el estudio cuantitativo encontramos que en *los problemas de estructura aditiva* se produce una mejora en la capacidad de resolución de los mismos, pero esta mejora ha sido totalmente similar en los grupos experimental y control. En *los problemas de estructura multiplicativa*, todos los alumnos mejoran el rendimiento, aunque en general los resultados son inferiores a los de los problemas aditivos. Las mejoras son sensiblemente iguales en los grupos experimental y control. Los alumnos de 3º, como era de esperar, presentan mayores dificultades en la resolución de estos problemas. En *los problemas de dos operaciones*, se dan resultados análogos a los problemas de una sola operación, cons-

tatando también la gran dificultad que estos problemas plantean a los alumnos de 8 a 11 años.

No encontramos diferencias por sexo. Sólo, como era de esperar, encontramos diferencias por cursos.

En *la ejecución de las operaciones*, vemos cómo se produce una mejora en la ejecución de las operaciones suma y resta, pero muy poca en la multiplicación y división.

En *el uso del Sistema de Representación Visual-geométrico (SRVG)* detectamos una relación entre el uso por los alumnos del SRVG y el profesor. Por tanto, parece deducirse una correlación entre las creencias del profesorado (sobre la importancia y utilidad de este sistema) y sus decisiones didácticas, reflejadas en el hincapié que hacen sobre sus alumnos para que lo utilicen.

Se vislumbra la existencia de preferencias individuales por el uso de sistemas gráficos, pues existe, al menos en todos los grupos investigados, algún alumno que lo usa con preferencia sobre el otro sistema, a pesar del poco tiempo que lo llevan trabajando.

Los utilizan en un porcentaje mayor en los problemas de estructura aditiva, y en los problemas de multiplicar de tipo razón. Es también interesante ver cómo los alumnos que han comprendido la sintaxis del SRVG son capaces, con muy poca ayuda, de generalizarlo a los problemas de dos operaciones.

En *los problemas inventados* encontramos que los niños tienen interiorizada para cada operación aritmética un tipo concreto de categoría semántica que sería, para la suma: combinación o cambio; para la resta: cambio; para la multiplicación: razón; y, para la división: reparto, a pesar de que los mismos niños son capaces de resolver problemas de las otras categorías semánticas. En relación al grupo experimental y grupo control, no se ha encontrado diferencias significativas en los problemas inventados. Los problemas inventados por los alumnos coinciden, salvo en el caso de la división, con los problemas propuestos en los libros de texto. Finalmente, señalamos que parece existir algunas diferencias en la categoría semántica del problema inventado, por lo menos en los problemas aditivos, cuando éstos son planteados a partir de una representación visual. Los alumnos diversifican más sus opciones e inventan problemas de diferentes categorías. La entidad del estudio realizado no nos permite hacer afirmaciones, pero ha constituido una nueva hipótesis, cuya verificación pretendemos realizar.

El estudio cualitativo nos permitió analizar los procesos de resolución que siguen los niños, así como las habilidades que ponen en juego.

Tomando como ejemplo una alumna (Davinia), vemos que resuelve correctamente los problemas en ambos sistemas y exterioriza el uso de diversas habilidades cognitivas, heurísticas y metacognitivas. Entre las habilidades cognitivas, podemos destacar el conocimiento que posee acerca de la sintaxis y la semántica de ambos sistemas de representación: visual-geométrico y el aritmético. Reconoce utilizar algún heurístico cuando no comprende el problema. Demuestra que planifica el proceso, verifica la corrección del resultado y es capaz de explicar para que sirven las distintas etapas del mismo. En cuanto a sus preferencias por la utilización de uno de los sistemas para resolver el problema se inclina por usar operaciones “*por ser más fácil*”.

La adquisición del nuevo sistema de representación fue logrado sólo por algunos niños. Observamos cómo los niños de mayor rendimiento eran capaces de realizar una buena representación mental del problema, que como apuntan Resnick y Ford (1981) es el primer paso en cualquier situación de resolución de problemas. Existe una relación entre las habilidades que exteriorizan y su capacidad para resolver el problema. Como mucho autores han afirmado (Lester, 1983, De Corte, 1993, Schoenfeld, 1992) los alumnos que demuestran poseer más habilidades metacognitivas se presentan como los mejores resolutores.

Sobre las actitudes de los alumnos

La actitud positiva hacia la resolución de problemas se muestra ligeramente superior que hacia las Matemáticas, lo cual puede ser un indicativo de la importancia que le conceden los profesores: «*que la resolución de problemas sea el eje de la enseñanza de las Matemáticas*» (NCTM, 1980), o responder a una predisposición favorable de los alumnos hacia ella.

Observamos cómo los alumnos destacan la utilidad de las Matemáticas y aún no consideran que “la Matemática es memorizar reglas para hacer cálculos aburridos», tan frecuente en diversos estudios que hemos revisado, y que juega un papel condicionante en sus cuestionamientos sobre las Matemáticas. En los alumnos seleccionados no hemos encontrado correlación entre la actitud y el sexo, entre la actitud y el rendimiento, entre la actitud, el rendimiento y las preferencias de los

alumnos dentro de las Matemáticas y sí entre el rendimiento y la seguridad en sí mismos. Un segundo estudio sobre actitudes, mediante técnicas cualitativas, nos permitió comprobar que las escalas construidas son un buen instrumento de medida.

Sobre la epistemología del profesorado

Constatamos que los profesores del grupo control reconocen haber cambiado en las clases de resolución de problemas poniendo el máximo interés para que sus alumnos mejoren, mientras los del grupo experimental en los cursos siguientes a la experiencia demostraron mayor preocupación y concedieron más tiempo para la resolución de problemas, dedicaron mayor atención a los alumnos con dificultades y una mayor orientación en la corrección de errores y en la resolución de problemas en general.

Con los datos obtenidos, podemos concluir que: «La implantación de un cambio curricular innovador se encuentra condicionado, entre otros elementos, por los conocimientos, creencias y decisiones de los profesores. De ahí la importancia de determinar el papel del profesor para poder juzgar su influencia en el sentido más global del cambio curricular y arbitrar modelos de intervención, con implicación directa del mismo, que ayuden a facilitar su implantación y entender mejor la dinámica de estos procesos».

Consideraciones generales

La investigación se centró en los tres objetivos generales, ya comentados, pero éstos, obviamente, están relacionados y permiten establecer conclusiones sobre los tres elementos del microsistema educativo: alumnos, contenidos y profesores, que hemos considerado en la misma. El objeto de estudio fue la resolución de problemas aritméticos verbales organizados por su estructura semántica, con la presencia de un sistema de representación visual geométrico, que es autosuficiente, y que está basado, entre otros, en el esquema partes-todo. Argumento éste que nos permite interaccionar los tres elementos anteriores.

Otro elemento a considerar es que el estudio se hace con alumnos de 8 a 11 años, que tienen un cierto nivel de competencia en la resolución de problemas aritméticos verbales. Al abordar la resolución de dichos problemas con el nuevo sistema de representación, éste provoca poten-

cialidades o dificultades, tanto para el alumnado como para el profesorado. A modo de resumen global, podemos indicar como resultados generales de esta investigación los siguientes:

- La elaboración de un marco de interpretación para entender y estudiar los problemas aritméticos verbales de estructura aditiva (modelo de competencia del campo conceptual aditivo).
- La elaboración y comprobación de que las situaciones didácticas diseñadas e implementadas durante la instrucción (DIRPA), siguiendo el modelo de competencias para la resolución de problemas aritméticos, basado en los sistemas de representación formal numérico y visual-geométrico, se han revelado como un recurso significativo para desarrollar y analizar habilidades cognitivas, metacognitivas y heurísticas en los alumnos.
- La propuesta metodológica, que recoge métodos y técnicas de los paradigmas cualitativos y cuantitativos, se ha mostrado idónea, ya que, mientras el análisis estadístico nos aportó comportamientos medios de los alumnos y nos dio una visión general de la situación, el estudio de casos nos ha permitido analizar los procesos de los estudiantes.
- La metodología de desarrollo y cambio curricular seguida se ha mostrado relevante para colaborar en la modificación y adaptación de la epistemología del profesor frente a un cambio curricular innovador. Dentro de ella, “la inmersión” aparece como una técnica útil para que el profesor asimile las experiencias necesarias y las acomode a los datos de la experiencia, es decir, que el profesor pueda reflexionar sobre su propia epistemología y adaptarla a las necesidades del cambio.

De manera más específica:

- Los alumnos desarrollaron habilidades tanto de tipo cognitivo, como metacognitivo y heurístico, siendo el uso del nuevo sistema de representación, el aspecto más conflictivo, porque este sistema tiene una semántica y una sintaxis que es necesario trabajar para poder interiorizarla. El tiempo dedicado fue corto y muchos alumnos tenían plenamente interiorizados unos esquemas de resolución mediante las operaciones, que ponían en juego automáticamente. Pero, es altamente alentador el hecho que el sistema de representación visual-geométrico

desarrolle potencialidades de tipo cognitivo, metacognitivo y heurístico en aquellos alumnos que llegan a interiorizarlo y que no produce perturbaciones en los alumnos que tienen dificultades en su comprensión.

- Con relación a la resolución de problemas se aprecian mejoras por parte del grupo experimental, aunque esta mejora no es significativa con respecto al grupo control. Este hecho puede ser explicado por dos razones: una de tipo cognitivo, el aprendizaje de un nuevo sistema de representación no verbal, no es fácil, y la otra, relacionada con el profesorado, nos ha confirmado el cambio que en su metodología y en su preocupación muestran los profesores del grupo control al saberse involucrados en una investigación, lo cual redundaba positivamente en la mejora en la resolución de problemas por parte de sus alumnos.
- El uso de los dos sistemas de representación permite detectar los estilos de resolución de problemas de los alumnos, así los alumnos que poseían una tendencia más visual, desarrollaron preferencias por dicho sistema.
- Con relación a la actitud de los alumnos, se muestra, en general, positiva hacia las Matemáticas y hacia la resolución de problemas, pero no se modifica de manera significativa con relación a la resolución de problemas después de la implementación del DIRPA, a pesar de ser éste valorado como altamente motivador, tanto por los alumnos como por los profesores.

Implicaciones para la enseñanza y perspectivas futuras

Las investigaciones actuales en Didáctica, en general, manifiestan la necesidad de tender puentes de forma que los resultados obtenidos en éstas lleguen al aula y éste era uno de nuestros objetivos: crear un material curricular, que una vez experimentado, con todas las reformas consecuentes, se convirtiese en un instrumento para el profesor.

Así, se ha planteado y desarrollado un diseño (DIRPA), que facilita un desarrollo coherente para la resolución de estos problemas, aceptado tanto por los alumnos como por los profesores, y que ayuda en el desarrollo de habilidades cognitivas, metacognitivas y heurísticas, útiles en la resolución de los mismos, cuya adaptación al primer ciclo de Educación Primaria o para enseñar a alumnos que aún no saben resolver problemas aritméticos verbales por el sistema de representación formal, parece no tener dificultad.

Además, hemos planteado una organización del campo conceptual aditivo que facilita una organización de los problemas aritméticos verbales aditivos a desarrollar en las clases de matemáticas, lo que aportará una mayor riqueza a la enseñanza de estos problemas, dadas las carencias detectadas tanto en la instrucción como en los libros de texto.

A lo largo del desarrollo y en la formulación de las conclusiones de todo este trabajo de investigación, han sido varios los interrogantes que han quedado abiertos y en cuya clarificación nos proponemos contribuir en el futuro. Entre ellos, se encuentran la comprobación empírica de las categorías semánticas implicadas en el modelo de competencias para el campo conceptual aditivo de las magnitudes discretas, un estudio más exhaustivo de los problemas de dos o más operaciones y los problemas no rutinarios, el análisis de la invención de problemas y el estudio de los cambios de actitudes hacia las matemáticas.

A pesar de toda la información recogida y de los diferentes niveles de interpretación analizados, todavía quedan muchas cuestiones por clarificar respecto a la organización y comprensión por parte de los estudiantes de los problemas aritméticos verbales, de la actitud hacia las Matemáticas y hacia la resolución de problemas, y de los comportamientos de los profesores hacia la implementación de un diseño curricular innovador, pero éste es el reto permanente de la investigación en Didáctica de las Matemáticas a cuyo avance esperamos haber contribuido.

Bibliografía:

- DE CORTE, E. (1993). La mejora de las habilidades de resolución de problemas matemáticos: hacia un modelo de intervención basado en la investigación. En J. Beltrán, M.D. Prieto, V. Bermejo y D. Vence (Eds) (1993): *Intervención psicopedagógica*. Ed. Pirámide. Madrid.
- DE CORTE, E. y VERSCHAFFEL, L. (1985). Beginning first graders' initial representation of arithmetic word problems. *Journal of Mathematical Behavior*, 4.
- FENNEMA E., CARPENTER T.P. y PETERSON, P.L. (1989). Teachers' decision making and cognitively guided instruction: A new paradigm for curriculum development. En K. Clements y N.F. Ellerton (Eds.). *Facilitating change in mathematics education*.

- Geelong, Victoria, Australia. Deakin University Press.
- FUSON, K. C. (1992) Research on Whole Number Addition and Subtraction. En D.A. Grouws: *Handbook of research on Mathematics Teaching and Learning*. pp. 243-275. MacMillan Publishing Company. New York.
- FUSON, K. y WILLIS, G. (1989). Second grader's use of schematic drawings to solve addition and subtraction word problems. *Journal of Educational Psychology*, 81, pp. 514-520.
- GOLDIN, G.A. (1987). Cognitive Representational Systems for Mathematical Problem Solving. En C. Janvier (Ed): *Problems of representation in the teaching and learning of Mathematics*. Hillsdale. N.J. Lawrence Erlbaum.
- GOLDIN, G.A (1989). The development of a model for competence in mathematical problem solving based on systems of cognitive representation. En A. Borbás (Ed): *Proceedings of the Twelfth Conference PME*. Veszprem, Hungary: OOK Printing House.
- HERNÁNDEZ, J. y SOCAS, M.M. (1994). Modelos de competencia para la resolución de problemas basado en los sistemas de representación en Matemáticas. Monográfico del I Seminario Nacional sobre Lenguaje y Matemáticas. *Suma*, 16. Madrid, pp. 82-90.
- LESTER, F. (1983). Trends and Issues in Mathematical Problem Solving Research. En R. Lesh y M. Landau (Eds): *Acquisition of Mathematics Concepts and Processes*. Academic Press. New York.
- NATIONAL COUNCIL OF TEACHERS OF MATHEMATICS (1980). *An Agenda for Action: Recommendations for School Mathematics of the 1980s*. NCTM. Reston, VA.
- NICKERSON, R.S., PERKINS, D.N. y SMITH, E.E. (1987). *Enseñar a pensar: Aspectos de la aptitud intelectual*. Paidós. MEC. Barcelona.
- NODA, A., HERNÁNDEZ, J. y SOCAS, M.M. (1996). El uso de sistemas de representación no verbales en problemas aritméticos en el D.C.B. de Primaria. *Números*, 27. Tenerife, pp. 13-32.
- POLYA, G. (1957). *How to solve it*. (Traducción española: *Cómo plantear y resolver problemas*. México. Ed. Trillas, 1976).
- RESNICK, L. y FORD, W. (1981). *The Psychology of Mathematics for Instruction*. (Traducción española: (1990) *La enseñanza de las Matemáticas y sus fundamentos psicológicos*. Paidós-MEC).

- SHAVELSON, R. y STERN, P. (1981). Research on teachers pedagogical thoughts, judgements, decisions and behavior. *Review of Educational Research*. v. 51, núm. 4, pp. 455-498. Traducido al castellano, Investigación sobre el pensamiento pedagógico del profesor, sus juicios, decisiones y conducta. En Gimeno Sacristán y Pérez Gómez (1983): *La enseñanza: su teoría y su práctica*. Akal. Madrid. pp. 372-419.
- SCHOENFELD, A. (1992). Learning to think mathematically: problem solving, metacognition and sense making in mathematics. En D.A. Grouws (Ed) *Handbook of Research on Mathematical Teaching and Learning*. A Project of the National Council of Teachers of Mathematics. Macmillan Publishing Company. New York.
- SOCAS, M.M., AFONSO, C.; HERNÁNDEZ, J. y PALAREA, M. (1994). Un modelo de investigación convergente en educación matemática desde una perspectiva curricular. *Revista Interuniversitaria de Formación del Profesorado*, 21. Zaragoza. pp. 45-58.
- SOCAS, M.M., HERNÁNDEZ, J. Y NODA, A, (1996). Modelo de competencias para el campo conceptual aditivo de las magnitudes discretas. *Enseñanza de las Ciencias*. Barcelona. (Aceptado, pendiente de publicar).

Josefa Hernández Domínguez
Departamento de Análisis Matemático
(Área de Didáctica de las Matemáticas)
Universidad de La Laguna
38271 La Laguna (Tenerife)