NÚMEROS
Revista de didáctica de las matemáticas
N° 31, septiembre de 1997, págs. 47-56

El rincón de la calculadora gráfica

Tratamiento Gráfico de la función Logarítmica

Francisco Puerta García

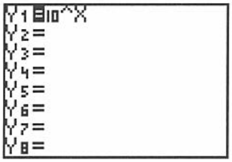
En la enseñanza secundaria es habitual construir la función logarítmica a partir de la exponencial. Se estudian las propiedades de la exponenciación y luego se define el logaritmo como la operación inversa. (Si $10^2 = 100$, entonces $\log_{10} 100 = 2$). Para representar la gráfica de la función logarítmica les hacemos notar que si el par ordenado $(2,100)$ pertenece a la gráfica de la función $y = 10^x$, el par $(100,2)$ forma parte de la gráfica de $y = \log_{10} x$.

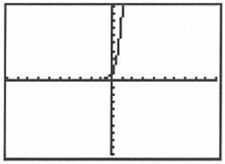
La propuesta que quiero hacer en este artículo consiste en que, usando distintas características de la calculadora gráfica (en este ejemplo usaremos la TI–82), nuestros alumnos se familiaricen con el comportamiento de la función logarítmica, en diferentes bases, construyendo su gráfica a partir de pares ordenados procedentes de la exponencial de la misma base, en los que invertimos los papeles de la ordenada y de la abscisa. Una vez conocidas la forma y propiedades de la función logarítmica, extraeremos, a partir de la manipulación **gráfica,** algunas conclusiones numéricas (que luego deben generalizarse algebraicamente) sobre la relación entre las funciones logarítmicas en distintas bases.

Veamos la posible secuencia de actividades a seguir:

En primer lugar les pediremos que representen la función $y = 10^x$ en una ventana estándar

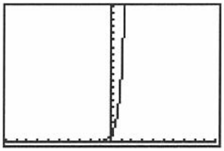
Esta sección ofrece a los lectores un foro en el que exponer ideas, consultar dudas y debatir planteamientos didácticos relacionados con el uso de la nueva generación de calculadoras gráficas avanzadas en la enseñanza de las matemáticas. Esperamos que participes enviando tus consultas o aportaciones a la dirección indicada al final.

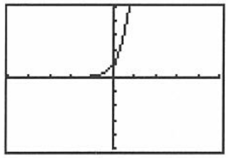




[−10,10]×[−10,10].

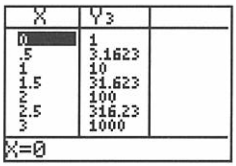
Para observarla mejor tienen que buscar otra ventana más apropiada. Por ejemplo

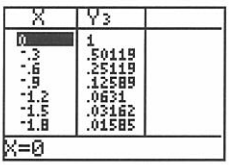


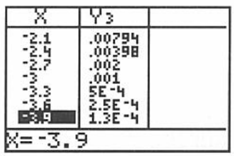


[−10,10]×[0,20] [−5,5]×[−5,5]

Una **tabla** nos puede mostrar mejor su comportamiento en las zonas que se *salen* de la pantalla (crece muy rápidamente), o lo que le ocurre en la parte negativa del eje X (al que se aproxima asintóticamente)

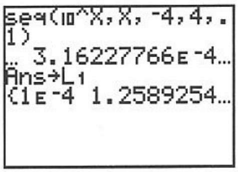


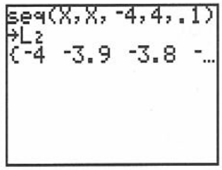




[1] La orden `seq(`, (sequence), nos permite generar una sucesión a partir de su término general, indicando `seq(`*expresión, variable, inicio, fin, incremento*`)`, donde *expresión* es el término general y *variable* representa al índice de la sucesión.
Por ejemplo, `seq(10^x,x,-4,4,.1)` le pide a la calculadora que genere la sucesión $\{10^{-4}, 10^{-3.9}, 10^{-3.8},..., 10^{3.9}, 10^{4}\}$incrementando el exponente desde -4 hasta 4 en pasos de tamaño 0'1.

Para representar su función inversa recurrimos a las listas de datos de la TI–82. En la pantalla principal de la calculadora introducimos las siguientes órdenes[1]

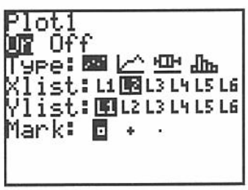


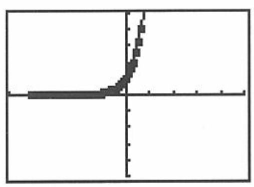


Con ellas hemos almacenado en las listas de datos L_1 y L_2 los valores

L_1	L_2
-4	1E-4
-3.9	1.2589254117942E-4
-3.8	1.5848931924611E-4
-3.7	1.9952623149689E-4
-3.6	2.5118864315096E-4
-3.5	3.1622776601684E-4
-3.4	3.981071705535E-4
-3.3	5.0118723362727E-4
-3.2	6.3095734448019E-4
-3.1	7.9432823472428E-4
...	...
etc.	

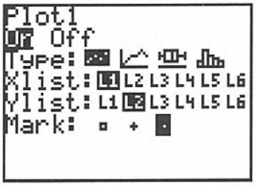
Ahora, vamos a utilizar el modo de representación de nubes de puntos, para ver nuestros datos en la ventana gráfica $[-5,5]\times[-5,5]$, como si fueran pares obtenidos de una distribución estadística bidimensional

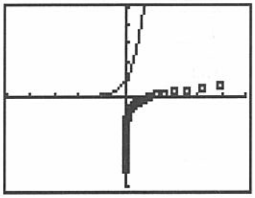




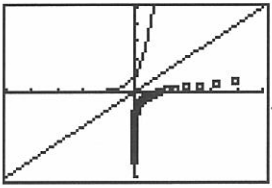
Como vemos, al utilizar L_1, como abscisas y L_2 como ordenadas, las marcas □ se superponen sobre la propia función;

pero si intercambiamos el papel de los datos (L_2 abscisas y L_1 ordenadas), en la gráfica ya vemos aparecer la función exponencial y la función logarítmica de base 10.

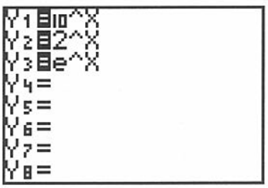


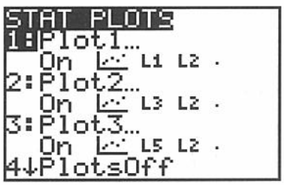


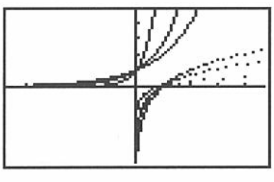
Trazando la diagonal del primer cuadrante, $y = x$, queda patente la simetría entre las gráficas de la función y de su inversa, producida por el intercambio de los papeles entre abscisas y ordenadas[2]



Visto esto, repetiríamos el proceso con exponenciales en otras bases, como pueden ser 2 y e, cuyos valores almacenaremos en las listas L_3 y L_5, respectivamente. Si representamos simultáneamente las tres exponenciales y sus inversas obtenemos





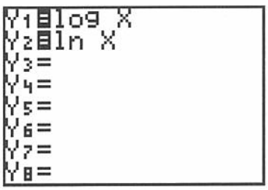


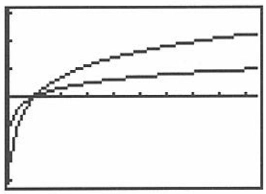
[2] Haría falta igualar las escalas de los dos ejes para la simetría sea perfecta. El menú ZOOM tiene la herramienta adecuada para ello.

Un trabajo adecuado sobre estas gráficas lleva fácilmente a los alumnos a la conclusión de que *todas* las funciones logarítmicas (de base mayor que la unidad) tienen, esencialmente, la misma forma y comparten las mismas propiedades: pasan por (1 , 0), tienen una asíntota vertical en x=0, su crecimiento es muy lento, etc. (Si el profesor lo considera conveniente, pueden explorar también el comportamiento de estas funciones cuando sus bases están entre 0 y 1.)

Ahora se nos plantea un problema: La calculadora dispone de exponenciales en cualquier base con la función ^ , pero ¿cómo representaremos funciones logarítmicas de base cualquiera en ella, si sólo *conoce* las de base 10 y base *e*?

Para responder a esto, precisemos un poco más en qué consiste este parecido de forma entre las dos funciones. Sus gráficas, en la ventana $[0, 9'4] \times [-3'1, 3'1]$, son[3]





Se puede comprobar fácilmente que ese parecido no obedece a una traslación, giro u homotecia aplicado a una de ellas para obtener la otra, porque, entre otras cosas, no se mantendrían la misma asíntota vertical ni el corte con el eje OX. Sin embargo, nuestros alumnos *gráficos* (que han recibido enseñanza en un contexto de calculadoras gráficas u ordenadores) estarán acostumbrados a efectuar cambios de escala en los ejes para deformar, estirando o comprimiendo, la gráfica de una función

[3] Obsérvese, que por la simetría de las logarítmicas con las exponenciales correspondientes, sabemos que $y = \log x$ tiene que ser la función más pegada al eje OX en el intervalo $[1, \infty)$, puesto que a su inversa $y = 10^x$ le ocurre lo propio respecto del eje OY.De todas formas, la calculadora puede indicar fácilmente cual es cual.