NÚMEROS. Revista de didáctica de las matemáticas
Volumen 42, junio de 2000, páginas 15-28

Dibujando mediante iteraciones

M. Benito y J. J. Guadalupe

Existen muchos libros y artículos relacionados con el estudio de iteraciones de funciones holomorfas o meromorfas en el plano complejo. Su estudio teórico conduce a los sistemas dinámicos y a la aparición de conjuntos fractales. El conjunto de Mandelbrot es el más conocido de los que aparecen en la geometría fractal. Sus admiradores se complacen en asegurar que es el objeto más complicado de las matemáticas y, sin embargo, tiene una definición muy simple.

Para cada número complejo $c \in \mathbb{C}$ designamos por Q_c a la aplicación de $\mathbb{C}$ en $\mathbb{C}$ definida por

$$Q_c(z)=z^2+c.$$

Dado un $z_0 \in \mathbb{C}$ llamamos órbita de z_0 por Q_c a la sucesión $\left\{Q_c^n(z_0)\right\}_{n\in N}$.

Se denomina conjunto de Mandelbrot al subconjunto de $\mathbb{C}$ formado por los c para los que la órbita de 0 por Q_c está acotada. Lo denotaremos por M.

Para cada número complejo c, se denomina conjunto de Julia J_c al subconjunto de $\mathbb{C}$ formado por todos los $z_0 \in \mathbb{C}$ tales que su órbita por Q_c está acotada.

G. Julia [6] y P. Fatou [5] encontraron que, si la órbita de 0 por Q_c está acotada, entonces J_c es un conjunto conexo; en cambio, si no está acotada, J_c es un conjunto completamente disconexo.

La siguiente proposición ayuda a decidir cuándo la órbita de un punto no está acotada.

Si $|z| > máx\{2, |c|\}$*, la órbita de* z *por* Q_c *tiende a infinito.*

Su demostración es sencilla:

Sea $c=\rho e^{i\alpha}$, $z=re^{i\beta}$. Por la condición $|z| > |c|$ existe un número real $\gamma_0 > 0$ tal que $r = \rho(1 + \gamma_0)$. Por tanto $\left|Q_c(z)\right| = \left|\rho(1+\gamma_0)^2 e^{2\beta i} + \rho e^{i\alpha}\right| =$

$$\rho\left|r(1+\gamma_0)e^{i2\beta} + e^{i\alpha}\right| \geq \rho\left|r(1+\gamma_0)-1\right| = \rho\left|r-1+r\gamma_0\right| \geq \rho\left|1+2\gamma_0\right|$$

Sean. $Q_c^j(z) = r_j e^{i\beta j}$, $r_j = \rho(1+\gamma_j)$, $j > 0$. Por lo anterior, $\gamma_j \geq 2\gamma_{j-1}$ y así $\gamma_j \geq 2^j \gamma_0$. Si $\rho \neq 0$, como ρ y γ_0 son fijos, la órbita de z por Q_c tiende a infinito. Si $\rho = 0$, entonces $\left|Q_0^n(z)\right| = |z|^{2n} > 2^{2^n}$ y por consiguiente la órbita de z tiende a infinito.

Si $c = -2$, tenemos que $Q_{-2}(0) = -2$, $Q_{-2}(-2) = 2$ y $Q_{-2}(2) = 2$, luego la órbita de 0 por Q_{-2} está acotada. Así, $-2 \in M$.

Dado que $Q_c(0) = c$, $Q_c^2(0) = c^2 + c$, y que para $|c|>2$, $|c^2+c| = |c||c+1|>|c|$, la anterior proposición prueba que el conjunto de Mandelbrot está contenido en el círculo de centro 0 y radio 2.

Hay un aspecto en el estudio computacional de las iteraciones que escapa del análisis y que trata de mostrar la belleza de los dibujos que se pueden generar con ayuda de los ordenadores. Existen varias estrategias para generar dibujos mediante iteraciones y aquí describiremos alguna de ellas poniendo de manifiesto, en algunos casos, su estabilidad.

En la literatura son frecuentes programas como el programa 1, que intentan dibujar el conjunto de Mandelbrot; aquí lo hemos realizado en Ubasic [7], que nos permite intentar efectuar los cálculos en forma exacta, esto es utilizando números racionales y no aproximaciones decimales.

La parte real de c recorre el intervalo [-2, 2] de centésima en centésima, y para cada uno de estos valores su parte imaginaria varía de centésima en centésima entre -2 y 2. Para cada valor de c el programa calcula el número de iteraciones necesarias para que la órbita de 0 por Q_c alcance el exterior del círculo de centro en 0 y radio 2. Entonces asigna a la celdilla *(pixel)* correspondiente a ese valor de e un color en función de dicho número, dejando sin colorear (en negro) los puntos que en un determinado número k de pasos, fijado previamente, no ha alcanzado el exterior del círculo.

```
5    ' programa 1
6    ' dibuja el conjunto de Mandelbrot con calculos exactos
10   screen 23
20   for X=0 to 400
30   for Y=0 to 400
40   X1=(X-200)//100:Y1=(Y-200)//100
50   R=X1*X1+Y1*Y1
60   if R>4 then pset (X,Y),1:goto 180
70   X3=X1 : Y3=Y1
80   N=1
90   repeat
100  N=N+1
110  if N>10 then 180
120  X2= (X3*X3-Y3*Y3+X1)
130  Y2= (2*X3*Y3+Y1)
140  R2=(X2*1.)\^2+(Y2*1.)\^2
150  X3=X2 : Y3=Y2
160  until R2>4
170  pset (X,Y) , (N@16)+1
180  next Y
190  next X
```