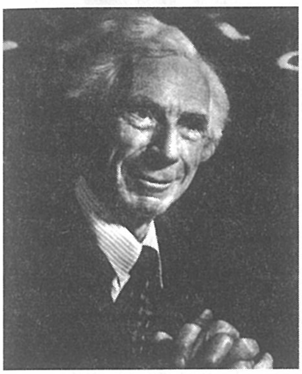
¿ANTINOMIA O TRIVIALIDAD? LA PARADOJA DE RUSSELL

José M. Ferreirós

Mil veces se ha escrito que la célebre disputa sobre fundamentos, a comienzos del siglo XX, surgió del descubrimiento de las paradojas de la lógica y la teoría de conjuntos. Historiadores recientes han mostrado cómo esta idea es sólo una media verdad: más importantes fueron las disputas sobre la metodología abstracta frente a la constructiva, que habían empezado ya en el XIX. Pero, en todo caso, las paradojas han afectado enormemente al estudio de los fundamentos de la matemática y a la concepción de las relaciones entre lógica y matemáticas.



Bertrand Russell

Entre todas las paradojas, la de Russell destaca por su carácter simple y directo. La mayoría de los conjuntos no pertenecen a sí mismos: N no es un número natural, ni R un número real; pero el conjunto universal, si existe, debería ser uno de sus propios elementos. Llamemos $\boldsymbol{B}$ al conjunto de *todos* los conjuntos que no pertenecen a sí mismos, $\boldsymbol{B} = \{x : x \notin x\}$; el mismo $\boldsymbol{B}$ es un conjunto y, dada su definición, $\boldsymbol{B} \in \boldsymbol{B}$ si y sólo si $\boldsymbol{B} \notin \boldsymbol{B}$. Lo llamativo del caso es que la paradoja sólo requiere tres nociones aparentemente muy simples: las de conjunto, pertenencia y negación, junto con los principios lógicos fundamentales de tercio excluso y no-contradicción. La historia de esta contradicción tiene el valor añadido de mostrar cómo, en el desarrollo matemático, una paradoja puede dar lugar a un teorema, y lo extraño llegar a parecer trivial.

Para entender cómo surgió la cuestión, empezaremos con el método de diagonalización —tan importante en lógica— que Georg Cantor (1845-1918) encontró hacia 1890, y que se emplea al demostrar que R no es un conjunto enumerable. Con dicho método Cantor consiguió demostrar que, dado un conjunto C, existe otro de mayor cardinalidad: el conjunto de las funciones $\{f : C \rightarrow \{0,1\}\}$. Este resultado es lo que hoy llamamos el *teorema de Cantor*. Se publicó en un articulito aparecido en 1892, pero curiosamente Cantor no lo integró en su obra magna de los años 1890. La razón parece haber sido que, para él, un conjunto de funciones era algo bien distinto de un conjunto de, pongamos, números. Por ello, su importante teorema no le parecía un resultado elemental de la teoría de conjuntos.

El joven aristócrata inglés Bertrand Russell (1872–1970) se ocupó en estudiar la obra de Cantor hacia 1900. Fue él quien puso de relieve la gran importancia del teorema de Cantor, al reformularlo en la versión moderna: dado un