¿2000?: LA CONJETURA DE KEPLER

Adolfo Quirós Gracián

Le necesitamos. Podemos colocar las naranjas, pero tenemos problemas con las alcachofas.

Los agricultores de Ann Arbor enviaron este mensaje a Thomas C. Hales poco después de que anunciase en agosto de 1998 que había resuelto la conjetura de Kepler, y que por tanto la mejor forma de colocar naranjas es la que utiliza cualquier frutero.

La pregunta contestada por Hales es ¿cómo llenar una caja con esferas idénticas (naranjas por ejemplo) para que la parte de la caja que queda vacía sea lo menor posible? Cada manera de llenar la caja es un *empaquetamiento de esferas*, la razón entre el volumen que ocupan las esferas y el volumen de la caja es la *densidad* del empaquetamiento, y la cuestión es ¿cuál es el empaquetamiento de máxima densidad? Como la conjetura de Kepler estudia empaquetamientos de todo el espacio, hay que afinar un poco la noción de densidad, pero la idea es la misma.

Lo que Kepler conjeturó en 1611, y Hales parece haber demostrado casi 400 años después, es que la máxima densidad que puede alcanzar un empaquetamiento de esferas en el espacio es $\frac{\pi}{\sqrt{18}} \approx 0{,}74$, la densidad del empaquetamiento que se utiliza en las fruterías.

100

Cuando Hilbert incluyó esta conjetura en su famosa lista de problemas, no sabía el papel que los empaquetamientos de esferas iban a desempeñar en la tecnología de la información: el diseño de buenos empaquetamientos permite enviar señales por un canal con ruido sin perder calidad; los códigos que garantizan la fidelidad del sonido de un CD utilizan versiones binarias de los empaquetamientos.

La conjetura de Kepler comparte con el último teorema de Fermat al menos tres características. Una es que, a pesar de lo simple de sus enunciados, han resistido más de 350 años de ataques. La segunda es la sutileza de sus detalles, que han llevado a notables matemáticos a proponer soluciones que han resultado ser falsas. Por último, ninguna de las dos se habrían podido resolver, al menos del modo en que lo han sido, mucho antes de la última década del segundo milenio.

Esta última similitud encierra también una gran diferencia. La demostración de Wiles del último teorema de Fermat necesita conceptualmente la poderosa maquinaria de las matemáticas de la segunda mitad del siglo XX. Por el contrario, ya en 1953 L. Fejes Tóth redujo la conjetura de Kepler a un enorme cálculo que involucraba muchos casos específicos. La dificultad parecía estribar fundamentalmente en la capacidad de cálculo, y en esto la conjetura de

Kepler se parece más al teorema de los cuatro colores que al último teorema de Fermat.

En 1958 C. A. Rogers dijo que la conjetura de Kepler es un resultado "que muchos matemáticos creen y todos los físicos saben", señalando así la enorme distancia que hay entre observación experimental y prueba, y como para un matemático la intuición es necesaria, pero no suficiente. Demos un ejemplo de cómo en asuntos de esferas la intuición puede engañarnos.

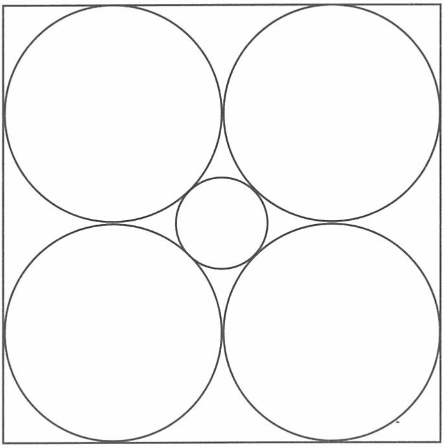
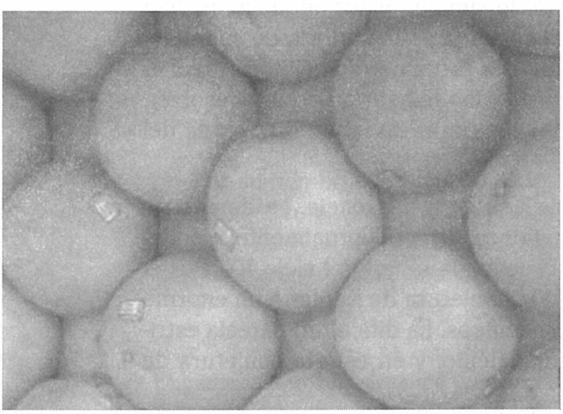


Figura 1

Dibujemos en el plano 4 círculos de radio 1 centrados en los puntos $(\pm 1, \pm 1)$ y un circulo, más pequeño, centrado en el origen y tangente a los otros 4 (Fig. 1). El círculo central está claramente contenido en el cuadrado de lado 4 que rodea a los 4 círculos originales. Lo mismo es cierto si consideramos 8 esferas de radio 1 con centros en los puntos $(\pm 1, \pm 1, \pm 1)$ del espacio tridimensional: una novena esfera central, tangente a las otras 8, permanece dentro del cubo que rodea a éstas. No parece haber motivos para que las cosas cambien en dimensión d. Pero la distancia del origen a cualquiera de los puntos $(\pm 1, \dots, \pm 1)$ es $\sqrt{(\pm 1)^2 + \dots (\pm 1)^2} = \sqrt{d}$ y por tanto el radio de la esfera central es $\sqrt{d} - 1$. Como la distancia del origen a un lado del cubo es 2 en cualquier dimensión, resulta que para $d=9$ la esfera central toca los lados del cubo, y si $d \geq 10$ la esfera central se sale del cubo.

100

No daremos detalles de la demostración de Hales, pero intentaremos explicar dos de las dificultades que ha tenido que superar.



El primer resultado significativo se debe a Gauss, quien consideró empaquetamientos reticulares, aquellos en los que los centros de las esferas forman un retículo. Dos ejemplos son, en el plano, el empaquetamiento hexagonal, en el que se tesela el plano por hexágonos regulares y las esferas son los círculos inscritos en los hexágonos; y, en el espacio, el empaquetamiento del retículo centrado en las caras del cubo (rccc), que es como se colocan las naranjas. En 1831 Gauss demostró que, entre los