FRACTALES: ESOS ENTES CAPRICHOSOS

K. B. Sadarangani

Comenzamos describiendo una serie de fenómenos naturales cuyas modelizaciones matemáticas están íntimamente relacionadas con los fractales.

Pensemos en una frontera entre estados. Con el paso del tiempo, esta frontera se ve sometida a cambios debidos a enfrentamientos, acuerdos locales, pequeñas anexiones, etc., que hacen que el trazado de ésta vaya variando. El perfil de una costa sufre un proceso análogo al de una frontera. Los elementos en contacto, agua y tierra, están sometidos durante largos períodos a interacciones (erosiones eólicas y marinas, basculación continental, etc.), que modifican permanente la forma de la costa.

Los procesos de ramificación y subramificación de los árboles confieren a éstos una naturaleza de tipo fractal. Algo similar ocurre con los procesos relacionados con la red de afluentes de un río o con la red bronquial.

En lo que sigue, nos planteamos dar una definición operativa de lo que es un fractal. Un fractal viene a ser el resultado final que se crea a través de la iteración infinita de un proceso geométrico determinado. Por lo general, el proceso generador es de naturaleza muy simple y determina perfectamente el resultado final que, en la mayoría de los casos, debido a la repetición *infinita* que se ha realizado, tiene una complicación extraordinaria.

A continuación, daremos el proceso que genera el llamado conjunto de Cantor que es un típico ejemplo de conjunto fractal.

Partimos del intervalo unidad $I = [0,1]$. Dividimos este intervalo en tres partes iguales y consideramos los dos intervalos cerrados que contienen a los extremos

$$E_{11} = [1,\tfrac{1}{3}]\ ,\ E_{12} = [\tfrac{2}{3},1].$$

Cada uno de estos intervalos se divide a su vez en tres intervalos iguales, de los cuales prescindimos del intervalo central, obteniéndose

$$E_{21} = [0,\tfrac{1}{9}]\ ,\ E_{22} = [\tfrac{2}{9},\tfrac{1}{3}]\ ,\ E_{23} = [\tfrac{2}{3},\tfrac{7}{9}]\ ,\ E_{24} = [\tfrac{8}{9},1].$$

Si continuamos este proceso indefinidamente, en la etapa k-ésima habremos obtenido 2^k intervalos cerrados E_{kj} ($j = 1, 2, \ldots, 2^k$), de longitud 3^{-k} cada uno de ellos. Para cada $k = 1, 2, \ldots$ sea

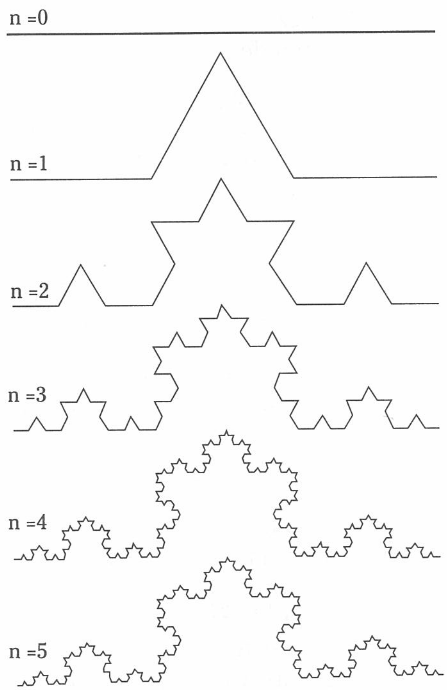
$$E_k = \bigcup_{j=1}^{2^k} E_{kj}$$

Es obvio que $E_{k+1} \subset E_k$. Se denomina *conjunto ternario de Cantor* a

$$E_k = \bigcap_{k=1}^{\infty} E_{kj}$$

En el siguiente ejemplo, daremos el proceso que genera la llamada *curva de Koch,* construida por Helge von Koch en 1904. El proceso es el siguiente. Partimos del segmento unidad [0,1] y lo dividimos en tres partes iguales. Sustituimos la parte central por dos segmentos que con la parte desechada formaría un triángulo equilátero. Se obtiene así una poligonal P_1 de longitud $\frac{4}{3}$. Con cada uno de los cuatro segmentos se repite la operación anteriormente descrita, obteniéndose una poligonal P_2 de longitud $\frac{16}{9}$. Se itera indefinidamente este proceso y la curva límite a la que converge P_k cuando k tiende a infinito es la llamada curva de Koch.

Proceso de generación de la curva de Koch.



12

A continuación, mostramos cómo los llamados *sistemas dinámicos complejos* generan, de forma natural, conjuntos fractales.

El origen de la teoría de los sistemas dinámicos complejos se remonta a los trabajos de los matemáticos franceses Julia (1893-1978) y Fatou (1878-1929). Sus resultados pasaron al olvido y en las tres últimas décadas han recobrado valor por la fuerte presencia de los sistemas dinámicos en el mundo real (predicción del tiempo, dinámica de poblaciones, dinámica epidemiológica, etc.).