

GEOMETRÍA SIMPLÉCTICA, ¿SÓLO UNA TEORÍA MATEMÁTICA MÁS?

Juan Carlos Marrero González

La geometría simpléctica es hoy día uno de los campos activos de investigación en matemáticas pero, ¿es sólo una disciplina matemática más? A lo largo de estas líneas intentaremos dar, modestamente y en la medida de lo posible, argumentos que sugieran al lector una respuesta a esta cuestión.

El término simpléctico viene del griego *symplektikos* que significa “que entrelaza” o “que une”. Este nombre fue usado por primera vez en 1939 por H. Weyl. En cualquier caso, el origen de la geometría simpléctica habría que buscarlo en el siglo XIX con los trabajos de Lagrange sobre mecánica analítica. De todas formas, durante el siglo XIX la naturaleza geométrica y cualitativa de la mecánica no estaba nada clara. Fue Poincaré, a principios del siglo XX, quien inicia la era cualitativa con el estudio de las órbitas en el problema de los n -cuerpos. Después de Poincaré, las técnicas simplécticas empiezan a ser usadas y la geometría simpléctica va avanzando de manera que en los años 60 está consolidada como una rama de las matemáticas y el nexo de unión con la mecánica ha sido definitivamente establecido. Finalmente, en los últimos 30 años, un crecimiento espectacular de las investigaciones ha convertido a la geometría simpléctica en una de las producciones matemáticas y físicas más importantes del siglo XX.

De forma elemental, podríamos decir que la geometría simpléctica es la *geometría de las áreas orientadas*. A continuación, intentaremos justificar esta afirmación de una manera intuitiva. Comencemos con el ejemplo más sencillo: el plano \mathbb{R}^2 . La forma simpléctica usual Ω del plano \mathbb{R}^2 es un objeto matemático que a un par de vectores $\vec{u} = (u_1, u_2)$ y $\vec{v} = (v_1, v_2)$ de \mathbb{R}^2 les asocia el área orientada del paralelogramo en \mathbb{R}^2 generado por los vectores \vec{u} y \vec{v} , esto es, $\Omega(u, v) = u_1v_2 - u_2v_1$. Ω es antisimétrica y no degenerada en el sentido de que las únicas áreas nulas resultan cuando \vec{u} y \vec{v} son colineales. Teniendo en cuenta las consideraciones anteriores uno puede construir, de manera sencilla, una forma simpléctica lineal sobre \mathbb{R}^{2n} (una aplicación $\omega: \mathbb{R}^{2n} \times \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}$, \mathbb{R} -bilineal, antisimétrica y no degenerada). Es suficiente ver a \mathbb{R}^{2n} como el producto de planos $\mathbb{R}^2 \times \dots \times \mathbb{R}^2$. Entonces el área orientada de un paralelogramo es la suma de las áreas orientadas de sus proyecciones sobre cada uno de estos planos. Sin embargo, no es posible definir un concepto de área orientada sobre un espacio de dimensión impar como \mathbb{R}^3 sin introducir degeneraciones. De la discusión anterior se deduce que sólo los espacios de dimensión par son los candidatos que pueden admitir una forma simpléctica. Parece entonces lógico que además de \mathbb{R}^{2n} , otros posibles espacios simplécticos sean las variedades diferenciables de dimensión par. Las variedades diferencia-

17