LA PARADOJA DE BANACH-TARSKI

Manuel Flores Mederos

El resultado al que alude el título de este artículo se encuentra enmarcado dentro de las llamadas "construcciones paradójicas" que, aunque en sí mismas no entrañan ninguna paradoja, chocan bruscamente con nuestra concepción de la realidad, sobre todo si se camuflan en un marco geométrico. En particular, la paradoja de Banach-Tarski se refiere a la posibilidad de duplicar objetos por medio de cortes, muy poco convencionales, para formar otros exactamente iguales al inicial, simplemente ensamblando piezas.

La clave, que aparece en su propia demostración, se encuentra en el conocido *Axioma de elección de Zermelo* que, aunque de simple enunciado, resulta ser independiente del sistema de axiomas de la aritmética convencional. En una de sus muchas formas, este axioma afirma que,

Dada una familia de conjuntos no vacíos A_i podemos elegir un elemento $a_i \in A_i$ de cada conjunto A_i.

La sutileza del enunciado se puede poner de manifiesto con los siguientes ejemplos:

(a) De un conjunto infinito de pares de calcetines sólo podemos elegir un calcetín de cada par si aceptamos el axioma de elección.

(b) De un conjunto de pares de zapatos podemos elegir un zapato de cada par sin invocar el axioma de elección; basta elegir el "zapato izquierdo" de cada par.

Por otra parte, conceptos como los de longitud, área o volumen existen desde la antigüedad. Son conceptos nada triviales que requieren cierto grado de abstracción; no en vano debemos recordar lo duro que resulta transmitirlo a nuestros jóvenes estudiantes, pero a medida que nos familiarizamos con ellos ni siquiera pensamos que realmente sólo existen como conceptos que son. En este sentido los matemáticos se han planteado, por muchos motivos, la necesidad de elaborar una teoría sólida que permita formalizar estos conceptos y que hoy conocemos como *teoría de la medida*.

En 1902, Lebesgue presenta en su tesis doctoral, sólo en el caso unidimensional, el problema de la medida como aquel de encontrar una función de conjunto m (medida de Lebesgue) que satisfaga ciertas propiedades "obvias" desde el punto de vista geométrico, a saber:

(i) $m(J) = 1$, donde J denota el cubo unidad. Por cubo en dimensiones uno o dos entendemos el intervalo o el cuadrado respectivamente.

(ii) m es invariante por traslaciones, es decir, la medida de un conjunto y su trasladado deben coincidir.

(iii) Si $E = E_1 \cap E_2 \cap E_3 \cap \ldots$ es la intersección de una familia numerable