LOS ESPACIOS ABSTRACTOS Y EL ANÁLISIS FUNCIONAL

Fernando Bombal

La consideración de diversos conjuntos de funciones ha sido práctica habitual en matemáticas desde muy antiguo. Piénsese por ejemplo en el conjunto de soluciones de una ecuación diferencial, cuya consideración parece evidente en cuanto se formula el problema, aunque el estudio explícito de su estructura no comenzó a hacerse hasta bien entrado el siglo XIX. Más frecuente (desde el siglo XVIII) fue el empleo de sucesiones o, más generalmente, familias de funciones dependientes de uno o varios parámetros reales.

También es muy antigua la idea de extender los conceptos de límite y continuidad a conjuntos formados por objetos matemáticos distintos de números o de puntos del plano o del espacio: cálculo de límites de familias de curvas o superficies dependientes de uno o varios parámetros o el tratamiento de los problemas de cálculo de variaciones, donde se trata de maximizar o minimizar una expresión del tipo

$$J(\varphi) = \int_a^b F(x, \varphi(x), \varphi'(x), \ldots)\, dx,$$

siendo F una función dada y las variables un conjunto adecuado de curvas 41
regulares, admisibles parametrizadas en [a, b]. Este tipo de problemas aparece en multitud de cuestiones físicas o geométricas y la manera clásica de abordarlos era razonar por analogía al caso de funciones reales de una o varias variables reales: Así, si φ_0 minimiza a J, para cada $\varepsilon > 0$ y η función regular tal que $\eta(a)\ \eta(b) = 0$, la función $\varphi_\varepsilon := \varphi_0 + \varepsilon_\eta$ es una función admisible próxima a φ_0, luego $J(\varphi_\varepsilon) > J(\varphi_0)$, para todo ε suficientemente pequeño. Eso quiere decir que la función real de variable real $H(\varepsilon) := J(\varphi_\varepsilon)$ tiene un mínimo en $\varepsilon = 0$, luego su derivada (¡si existe!) ha de ser 0 en ese punto. Una derivación formal, seguida de una integración por partes y un razonamiento más o menos riguroso permite obtener la conocida ecuación de Euler, que es una ecuación diferencial que deben verificar las soluciones del problema.

Así pues, desde los mismos orígenes del cálculo, se fue poniendo de manifiesto la conveniencia de considerar conjuntos cuyos elementos, a diferencia de lo que sucede en el análisis clásico, no son puntos del espacio euclídeo ordinario, sino funciones, y la necesidad de extender a estos conjuntos las operaciones típicas del análisis. De esta manera se va forjando la idea de espacio funcional, ya latente en el siglo XIX, pero cuya sistematización y rigorización tuvo lugar en la primera mitad del siglo XX, y sólo fue posible por el desarrollo de la teoría de conjuntos, la topología general y la aparición de la noción de estructura.