LA DEMOSTRACIÓN ELEMENTAL DEL TEOREMA DE LOS NÚMEROS PRIMOS

Javier Cilleruelo Mateo

En 1949 Paul Erdös y Atle Selberg sorprendieron a la comunidad matemática con una nueva demostración del teorema de los números primos en la que, por primera vez, sólo se habían utilizado argumentos de naturaleza elemental.

TEOREMA (números primos). *El número de primos menores o iguales que x, $\pi(x)$, satisface la relación asintótica*

$$\pi(x) \sim \frac{x}{\log x}.$$

El teorema había sido probado 50 años antes por J. Hadamard y C. De la Vallée Poussin. Pero aquella demostración, y otras simplificaciones posteriores se habían apoyado en la poderosa maquinaria de la teoría de funciones de variable compleja que se había estado desarrollando durante la segunda mitad del Siglo XIX. Debemos remontarnos a los albores de las matemáticas y recorrer la historia de los números primos para saborear el gran acontecimiento que supuso esta nueva demostración, de carácter elemental, que evitaba la utilización de todo tipo de técnicas analíticas.

Los orígenes

El teorema fundamental de la aritmética afirma que todos los enteros mayores que 1, se pueden expresar como producto de números primos y de manera única, salvo por el orden de los factores. Son, por lo tanto, los objetos más relevantes de los números enteros, siendo además los responsables de las propiedades aritméticas de éstos. La prueba de este resultado, que ya era conocido por los pitagóricos, aparece en el libro IX de los *Elementos* de Euclides.

¿Cuándo se acaba la lista de los números primos, 2, 3, 5, 7, 11, 13, ...? Euclides argumentó que si hubiera un número finito de números primos, $p_1, p_2, \ldots, p_k$ entonces el número $N = p_1, p_2, \ldots, p_k + 1$, no podría ser divisible por ninguno de estos primos; es decir por ningún primo, contradiciendo por tanto el teorema fundamental de la aritmética.

TEOREMA (Euclides). *Existen infinitos números primos.*

Los números primos van apareciendo de una manera muy errática, pero cada vez con menor frecuencia, en la sucesión de los números enteros. El teorema de Euclides nos asegura que hay infinitos números primos. Pero, ¿cómo de numerosos son?, ¿cuántos números primos hay menores que x?

El gran matemático Leonhard Euler (1707-1783) encontró una identidad maravillosa que relacionaba los números primos con los números enteros:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \prod_p \left(1 - \frac{1}{p^s} \right)^{-1}, \text{ para todo } s > 1.$$

Es fácil convencerse de la validez de esta identidad. Cada uno de los factores del producto es igual a

$$1 + \frac{1}{p^s} + \frac{1}{p^{2s}} + \frac{1}{p^{3s}} + \dots,$$

y al multiplicar en todos los primos obtenemos una suma infinita de fracciones donde los denominadores son producto de primos o potencias de primos elevados a s. El teorema fundamental de la aritmética nos asegura que aparecen todos los números naturales y solamente una vez cada uno.

Si se toman logaritmos en la identidad y hacemos tender $s \to 1$, la parte de la izquierda tiende a infinito y la parte de la derecha tiende, salvo por un término finito, a la suma de los inversos de los primos. De esta manera, Euler demostró uno de los muchos teorema que llevan su nombre.

Teorema (Euler).

La suma de los inversos de los primos es infinita.

En particular, como ya se sabía desde Euclides, el teorema de Euler implica la existencia de infinitos números primos. Pero también implicaba algo más: los primos tienen que ser bastante numerosos para que la suma diverja. Legendre, en 1798, fue el primero en conjeturar que $\pi(x)$, el número de primos menores que x, debía aproximarse asintóticamente a $\frac{x}{\log x}$. Por las mismas fechas, K. F.
49 Gauss, utilizando una inmensa tabla de números primos que él mismo había construido, observó que la densidad de los primos en un entorno de n era aproximadamente $\frac{1}{\log n}$, por lo que el número de primos menores que x debería ser,

$$\pi(x) \sim \int_2^x \frac{dt}{\log t} \sim \frac{x}{\log x}.$$

Tuvieron que pasar muchos años hasta que, en 1850, Chebyshev consiguiera demostrar, con un ingenioso argumento combinatorio, que de hecho ese es el orden de magnitud de los primos menores que x.

Teorema (Chebyshev). *Existen dos constantes positivas $c < 1 < C$, tales que*

$$c\,\frac{x}{\log x} < \pi(x) < C\,\frac{x}{\log x}, \text{ para todo } x \geq 2.$$

No se confiaba, sin embargo, en que este tipo de argumentos combinatorios se pudieran afinar tanto como para poder demostrar el teorema de los números primos.

La demostración analítica

Bernhard Riemann (1826-1866), extraordinario matemático que había brillado con luz propia en otras disciplinas de las matemáticas, dejó también su huella en la teoría de números. Para su ingreso en la Real Academia de Berlín, en