DEMOCRACIA Y EL TEOREMA DE IMPOSIBILIDAD DE ARROW

José A. Moreno Pérez

Las decisiones colectivas se debaten entre criterios democráticos y dictatoriales. La matemática ha tratado de sustentar la racionalidad con su rigor y formalismo. El resultado más relevante en las elecciones sociales, el teorema de imposibilidad de Arrow, es una clara decepción. Sin embargo existen aportaciones positivas a este campo en el siglo XX.

Las *preferencias* sobre una serie de *alternativas* $A = (a_1, ..., a_m)$ se establecen por comparación entre pares y se formalizan por una relación binaria R sobre A. Se expresa aRb en lugar de $(a,b) \in R$ para reflejar que la alternativa a es *preferida* a b. Cada miembro i de un *colectivo* $N = (1, ..., n)$ que debe decidir sobre A manifiesta sus preferencias por una relación R_i sobre A. Una *regla de decisión colectiva* es un procedimiento para construir la relación de preferencia colectiva R_C a partir de las relaciones individuales $R_N = (R_i: i \in N)$.

Las relaciones R_i (y R_C) pueden estar restringidas a un tipo determinado. Si R^i es el conjunto de relaciones que puede manifestar el decisor i y R^C las posibles preferencias colectivas, una regla de decisión establece una *correspondencia* C entre $R^N = R^1 \times ... \times R^n$ y R^C; $C \subseteq R^N \times R^C$. Es una correspondencia porque el método puede fracasar al tratar de aportar la relación colectiva de R^C según el sentido de las manifestaciones R^N.

Establecido el *dominio* $D^N \subseteq R^N$ como el conjunto de relaciones de preferencia de los miembros del colectivo para las que el método es capaz de obtener una relación de preferencia colectiva $R_C \in R^C$ podremos hablar formalmente de la *función de decisión* colectiva F como una aplicación $F: D^N \rightarrow R^C$; tal que $\forall\ R_N \in D^N,\ F(R_N) = R_C \in R^C$.

En las *elecciones sociales* de candidatos alternativos, la relación que representa la selección de los candidatos de $E \subseteq A$ es $R_E = \{eRa: e \in E, a \in A\}$. Las elecciones posibles vienen dadas por $R^E = \{R_E: E \subseteq A\}$. Una *función de elección social* es una regla de decisión con $R^C \subseteq R^E$. En una elección por votación es además $R^i \subseteq R^E,\ \forall\ i \in N$. Existen diversas propuestas de *axiomas* que debe cumplir una regla de decisión socialmente justa (ver, H. Moulin, *Axioms of Cooperative Decision Making*. Cambridge University, 1988).

Las reglas basadas en la *mayoría* son las que construyen la relación colectiva R_C por $xR_C y \Leftrightarrow |\{ i \in N: xR_i y \}| > k$, para algún valor de k. La *regla de la mayoría absoluta* viene dada por $k = \frac{n}{2}$. Una de las objeciones más claras, el *efecto Condorcet*, era ya bien conocida al entrar el siglo XX (surge en la obra de Marie J. A. N. Caritat, marqués de Condorcet, *Essai sur l'Application de l'Analyse à la Probàbilité des Décisions Rendues à la Pluralité des Voix*, París, 1785). Sea por ejemplo $A = (a,b,c)$ y $n = 3$. Si aR_1bR_1c, bR_2cR_2a y cR_3aR_3b entonces $aR_CbR_CcR_Ca$; una preferencia cíclica.

55