# HITOS DEL ANÁLISIS MATEMÁTICO DEL SIGLO XX

**Antonio Córdoba**

57

No es fácil decidir cuáles han sido los resultados más relevantes del análisis matemático del siglo XX. Posiblemente las respuestas varíen demasiado, tanto entre las obtenidas de diferentes artistas, como las dadas por uno solo en distintas etapas de su biografía. Al hilo del encargo hecho por los editores, me parece que existen dos resultados de un carácter muy especial, a saber: el teorema de Carleson sobre la convergencia de las series trigonométricas, que puede ser considerado como una culminación del proyecto de análisis armónico lineal ensoñado por Fourier, y el teorema de De Giorgi-Nash sobre la regularidad de las soluciones de ecuaciones elípticas, que inauguró la teoría no lineal y resolvió uno de los problemas planteados por Hilbert.

*J. Fourier*

**El teorema de Carleson.**

La teoría de las series trigonométricas

$$\frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [\, a_n \cos (nx) + b_n \operatorname{sen} (nx)]$$

se remonta al siglo XVIII en conexión con el problema de la cuerda vibrante. Se atribuye a Fourier (1768-1830) la afirmación de que toda función periódica puede ser representada de esta manera.

En lenguaje moderno, toda función $f \in L^1 [-\pi,\pi]$ tiene una serie trigonométrica dada por

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos (nx)\, dx, \qquad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \operatorname{sen} (nx)\, dx$$

Surge el problema: *¿en qué sentido la serie representa a la función?*

En 1907 F. Riesz y E. Fischer contestaron afirmativamente a la pregunta anterior en el sentido de la métrica del espacio $L^2\,[-\pi,\pi]$. En el sentido opuesto, Du Boys Raymond encontró una función continua cuya serie de Fourier diverge en un punto.

En *Sur la convergence des series trigonometriques* (C. R. Acad. Sci. Paris, 1913), N. Lusin presentó el argumento siguiente: dada la serie de Fourier

$$f \approx \frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(nx) + b_n \,\mathrm{sen}\,(nx)] \tag{I}$$

podemos considerar la serie de potencias

$$\frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n - i\, b_n)\, z^n$$

con $z = e^{ix}$, cuya parte real es (I). La parte imaginaria es la serie conjugada:

$$\sum_{n=1}^{\infty} [- b_n \cos(nx) + a_n \,\mathrm{sen}\,(nx)] \tag{II}$$

Ahora bien, en 1906 Fatou había demostrado que la integral de Poisson $P_r f$ de una función integrable converge en casi todo punto al valor de la función. Si suponemos que $f \in L^2$ y consideramos

57

$$\tilde{f}(x) \approx \sum_{n=1}^{\infty} [- b_n \cos(nx) + a_n \,\mathrm{sen}\,(nx)]$$

resulta lo siguiente

$$P_r \tilde{f}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} [- b_n \cos(nx) + a_n \,\mathrm{sen}\,(nx)]\, r^n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\, Q_r(x-t)\, dt$$

donde
$$Q_r(x) = \frac{r \,\mathrm{sen}\,(x)}{1 - 2 r \cos(x) + r^2}$$

es el núcleo conjugado de Poisson. Del resultado de Fatou, aplicado a la función $\tilde{f}$, Lusin dedujo que

$$\tilde{f}(x) = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\varepsilon \le t \le \pi} \frac{f(x-t)}{2\, \mathrm{tag}\left(\frac{t}{2}\right)}\, dt = \mathrm{V.P.} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(x-t)}{2\, \mathrm{tag}\left(\frac{t}{2}\right)}\, dt$$

es válida para casi todo punto $x$. Además,

$$S_N f(x) = \frac{1}{2\pi} a_0 + \sum_{n=1}^{N} [a_n \cos(nx) + b_n \,\mathrm{sen}\,(nx)] =$$

$$= \frac{1}{\pi}\, \mathrm{V.P.} \int_{-\pi}^{\pi} \tilde{f}(x-t) \left[ \frac{1}{2\, \mathrm{tag}\left(\frac{t}{2}\right)} - \frac{\cos\left(N + \frac{1}{2}\right) t}{2\, \mathrm{sen}\left(\frac{t}{2}\right)} \right] dt$$