POLINOMIOS PARA-ORTOGONALES Y FÓRMULAS DE CUADRATURA PARA INTEGRANDOS PERIÓDICOS

Pablo González Vera

Es por todos bien conocido que el cálculo de una integral definida resulta un problema sumamente familiar para cualquier estudiante de un primer curso de ciencias o ingeniería. Por otro lado, también es sabido que los orígenes de tal problema se remontan a los de las propias matemáticas, pues el mismo está conceptualmente ligado al cálculo de un área plana, estando tal cuestión ya presente entre egipcios y griegos (Método de exhaución de Arquímedes). Con todo, es a partir del siglo XVI cuando la integración numérica, entendiendo como tal el estudio que permite determinar el valor numérico de una integral, desarrolla una gran abundancia de métodos. Éstos incluyen, entre otros, el caso del teorema fundamental del cálculo, series infinitas, relaciones funcionales, ecuaciones diferenciales y transformadas integrales. Junto a otros, tenemos los métodos de integración aproximada, basados en las *fórmulas de cuadratura* y donde una integral se aproxima por una combinación lineal de valores del integrando. A saber:

$$I(f) = \int_a^b f(x)\,dx \approx A_1 f(x_1) + \ldots + A_n f(x_n) = I_n(f)$$

65

En la fórmula anterior, $x_1, \ldots, x_n$ son las *abscisas* o *nodos* de la fórmula de cuadratura $I_n(f)$ y $A_1, \ldots, A_n$ sus correspondientes *coeficientes* o *pesos*. Así, para cada n natural fijo, se dispone de 2n parámetros que habrán de seleccionarse *adecuadamente* de modo que $I_n(f)$ proporcione una estimación *razonable* de I(f). Por ejemplo, en caso de que [a,b] sea finito, tomando los nodos igualmente espaciados, es decir: $x_j = a + (j-1)h$, $j=1,\ldots,n$, con $h = \frac{b-a}{n-1}$ $(n>1)$ surge, a partir de consideraciones geométricas elementales, la bien conocida *regla trapezoidal* donde $A_1 = A_n = \frac{h}{2}$ y $A_j = h$; $j = 2, \ldots, n-1$. Ahora bien, cuando el integrando presenta singularidades próximas al intervalo de integración

(piénsese por ejemplo en el cálculo de $\int_{-1}^{1} \frac{\sqrt{e^x}}{1-x^2}\,dx$),

la evaluación de $f(x_j)$ para cierto x_j puede resultar problemática. De aquí que se considere conveniente trabajar integrales de la forma

$$I_w(f) = \int_a^b f(x)w(x)\,dx \tag{1.2}$$

donde se supone que f es *suficientemente suave*, concentrándose las singularidades en w(x) (función peso), la cual supondremos no negativa en el intervalo de integración. Escribiendo:

$$I_w(f)=\int_a^b f(x)w(x)dx \approx \sum_{j=1}^{n} A_j f(x_j) = I_n(f) \qquad (1.3)$$

vemos que los coeficientes $A_1, \ldots, A_n$ dependen, en general, del peso w(x), el cual supondremos fijo, pudiendo $f(x)$ variar.

Antes de proseguir creemos obligado reflexionar sobre el siguiente aspecto: Con la gran cantidad de métodos existentes (algunos muy sofisticados) para calcular integrales, ¿vale la pena realmente profundizar en el estudio de las fórmulas $I_n(f)$ del tipo (1.3) (bastante elementales y primitivas)? La respuesta es muy simple: los procedimientos matemáticos sofisticados no siempre *funcionan* y aun haciéndolo, puede que no resulten apropiados desde un punto de vista computacional.

Así, consideremos por un momento el teorema fundamental del cálculo que permite escribir $\int_a^b f(x)w(x)dx = F(b) - F(a)$, siendo F una primitiva de $f(x)w(x)$.

Sin embargo, todos sabemos que el proceso de integración conduce a menudo a nuevas funciones trascendentes, a veces muy enrevesadas (intente el lector calcular una primitiva de $f(x)=\frac{1}{1+x^4}$) involucrando funciones de difícil evaluación y haciendo que métodos que aparentan ser *exactos* en la superficie, se conviertan en "aproximados" cuando descendemos a las profundidades de los procesos numéricos efectivos. Dicho esto, surge de inmediato, la siguiente cuestión: dada una fórmula de cuadratura $I_n(f)= \sum A_j f(x_j)$, qué criterio seguir en la elección de los parámetros $x_1, \ldots, x_n$ y $A_1, \ldots A_n$ de forma que
65 $I_n(f)$ proporcione una estimación *razonable* de $I_w(f) = \int_a^b f(x)w(x)dx$. Teniendo en cuenta que toda función continua se puede aproximar uniformemente por polinomios en [a,b], parece apropiado utilizar el criterio que determine $x_1, \ldots, x_n$ y $A_1, \ldots, A_n$ de modo que la correspondiente cuadratura $I_n(f)$, *integre exactamente* polinomios del mayor grado posible. Esto conduce a un sistema no lineal de $2n$ ecuaciones con $2n$ incógnitas. A saber:

$$\sum_{j=1}^{n} A_j f(x_j) = \int_a^b f(x)w(x)dx\,; \qquad k = 0, 1, \ldots, 2n-1.$$

Introduciendo el polinomio $Q_n(x)$ que tiene por ceros los nodos $x_1, \ldots, x_n$, se comprueba que satisface la siguiente relación

$$\int_a^b Q_n(x)x^j\, w(x)dx = 0; \qquad j=0,1,\ldots,n-1$$

o dicho con otras palabras, $Q_n(x)$ es ortogonal a cualquier polinomio de grado n-1 con respecto al producto interior inducido por w(x), esto es,

$$(f, g)_w = \int_a^b f(x)\overline{g(x)}w(x)dx.$$

La relación existente entre *polinomios ortogonales* y *fórmulas de cuadratura* ha facilitado un desarrollo inusitado de éstas en los últimos treinta años, tanto