EL TEOREMA DE LOS CUATRO COLORES: APPEL Y HAKEN (1976)

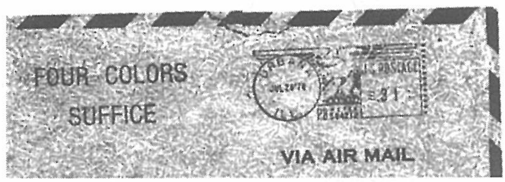
Pablo Fernández Gallardo

1. El problema

Algunos de los problemas más famosos de las matemáticas surgen a partir de preguntas muy sencillas. En 1852, de Morgan escribía a Hamilton:

> Un estudiante mío me pidió hoy que le diera una explicación a un hecho que no sabía que lo fuera, y que todavía no lo sé. Afirmaba que si dividimos una figura arbitrariamente y la coloreamos de manera que regiones vecinas lleven colores distintos, entonces cuatro colores son necesarios, pero no más.

Había nacido el *problema de los cuatro colores (P4C)*: probar que, dado un mapa cualquiera en el plano, cuatro colores bastan para colorearlo de manera que países vecinos lleven colores distintos.



Es un problema de enunciado sencillo y apariencia inofensiva, pero que esconde numerosas sutilezas.

2. Su (agitada) historia

El estudiante al que se refería de Morgan era Frederick Guthrie (que acabaría dedicándose a la física y a la poesía), que le transmitía una observación hecha por su hermano menor, Francis (luego abogado, matemático y botanista), mientras se afanaba en colorear un mapa de Inglaterra. De Morgan, vivamente interesado por el problema, escribió inmediatamente a Hamilton pidiéndole su opinión. Preocupado por si la cuestión resultaba ser trivial, se justificaba (con cierta rotundidad):

> Cuanto más pienso sobre ello, más evidente me parece. Pero si usted me muestra algún caso sencillo que me haga quedar como un animal estúpido...

Son las desventajas de plantear preguntas tan aparentemente sencillas. La cuestión no pareció interesar especialmente a Hamilton, que le contestaría

> ... no es probable que pueda atender a su problema de los cuatro colores en un futuro próximo...

En 1879, Kempe (otro abogado y matemático) publicó una demostración del teorema de los cuatro colores (T4C), que parecía dar fin al joven problema. Hasta que Heawood, en 1890, mostró que la prueba de Kempe no era correcta (aunque sí bastaba para probar que cinco colores son suficientes).

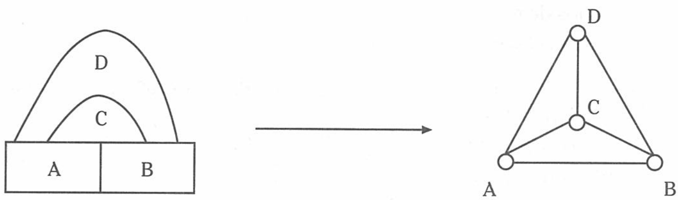
No fue hasta 1976 cuando Appel y Haken (con la ayuda de Koch) publicaron, finalmente, la prueba completa del teorema.

3. La traducción adecuada

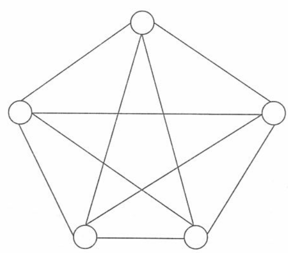
Quizás la manera más ilustrativa de describir el problema sea utilizando el lenguaje de los grafos. Un *grafo* G es un conjunto finito de vértices, $V(G)$, y un conjunto de aristas $A(G)$ (ciertos pares de elementos distintos de $V(G)$). Y colorear (los vértices de) un grafo G con n colores consiste en asignar un color a cada vértice de manera que vértices que sean extremos de una arista reciban colores distintos.

Un grafo plano es aquél que se puede dibujar en el plano de manera que los vértices sean puntos del plano y las aristas sean curvas continuas que no se cortan (salvo, quizás, en sus extremos).

Dado un mapa, elegimos en cada región un punto interior y unimos los puntos correspondientes a países con frontera común; obtenemos así un grafo plano. Por ejemplo, la traducción de uno de los mapas que describía de Morgan en su carta es:



Este ejemplo muestra que cuatro colores son necesarios. Alguien podría pensar entonces que el grafo,



es un contraejemplo para el T4C, porque colorearlo requiere 5. Pero este grafo no es plano, así que no hay un mapa en el plano cuyas relaciones de vecindad vengan descritas por sus aristas.

5. ¿Cómo abordarlo?

Evidentemente, el número de posibles mapas (o grafos planos) es infinito. La manera de abordar el problema es la siguiente: si existen contraejemplos al T4C, al menos habrá uno que sea minimal, lo más pequeño (en términos de número de vértices) posible. La estrategia es, entonces (resumiendo un argumento muy complejo):

Se demuestra que en un tal contraejemplo ha de aparecer, al menos, una de las "configuraciones" de un cierto conjunto. Esto es lo que se llama *inevitabilidad.*

Se comprueba que cada una de esas configuraciones se puede colorear con 4 colores (es la parte de *reducibilidad*).