

LA CONJETURA DE BIEBERBACH LLEGA A SER EL TEOREMA DE L. DE BRANGES

David Drasin

El análisis complejo tiene un efecto profundo tanto en las matemáticas puras como en las aplicadas. Como parte fundamental del análisis complejo, la teoría de las aplicaciones conformes también exhibe estas dos caras. Sea

$$f: D \rightarrow G \quad (1)$$

una aplicación lisa (suave) e inyectiva. Si f conserva los ángulos, entonces $f(z)$ o $f(\bar{z})$ (siendo \bar{z} el conjugado de z) debe ser analítica (según si f conserva o no la orientación).

Riemann afirmó en su famosa disertación (Gotinga, 1851): si D y G son dominios simplemente conexos propios del plano, entonces existe una aplicación conforme de D sobre G . La demostración dada por Riemann no era rigurosa: la aplicación f deseada se obtiene como un cierto límite, pero las matemáticas de su tiempo no eran suficientes para asegurar la existencia de este límite. En la década que comienza en 1910 varios matemáticos obtuvieron demostraciones rigurosas: P. Koebe, W. Osgood, D. Hilbert, entre otros. Las demostraciones que se presentan actualmente son muy cortas y sofisticadas: podemos manipular muy bien los procesos de límite. Una consecuencia es que, por lo general, existen soluciones a los problemas extremales sobre funciones inyectivas. Sin embargo, el teorema de Riemann es en muchos sentidos una anomalía: (a) no existe una función inyectiva analítica $f: \{1 < |z| < R_1\} \rightarrow \{1 < |z| < R_2\}$, excepto si $R_1 = R_2$; (b) si D y G son dominios en \mathbb{R}^n ($n > 2$), existe una aplicación conforme del tipo (1) sólo si f es una isometría euclídea.

Mientras que la teoría de las aplicaciones conformes se basa en el teorema de Riemann, su papel en las matemáticas aplicadas depende en general de la construcción de funciones específicas.

Elegimos siempre uno de nuestros dominios como $D = \Delta = \{|z| < 1\}$. La condición de que f sea inyectiva implica que $f'(z) \neq 0$ ($z \in D$) y, además, f es inyectiva si y sólo si $Af + B$ ($A \neq 0$) es inyectiva. Entonces, imponemos la convención que f se expresa como

$$f(z) = z + \sum_2^{\infty} a_n z^n \quad (|z| < 1) \quad (2)$$

lo que se suele indicar escribiendo $f \in S$, y el problema que nos concierne es la relación entre f y sus coeficientes a_n . Lo que es obvio es lo siguiente: para cada $n \geq 2$, $\inf_S |a_n| = 0$, siendo $f(z) = z$ la (única) función extremal, y $G = \Delta$. También, es claro que $\sup_S |a_n| = \max_S |a_n|$ existe para cada n , y ya demostró Littlewood en 1924 que $|a_n| < en$.

TEOREMA (de Branges; antes, conjetura de Bieberbach).

$$\text{Si } f \in \mathcal{S}, \text{ entonces } |a_n| \leq n \quad (n = 2, 3, \dots) \quad (3)$$

Esta cota es exacta.

El problema de determinar los a_n que son posibles en (2) también fue planteado por Bieberbach, pero todavía queda fuera del alcance de nuestras matemáticas.

Para ver los ejemplos que exhiben igualdad en (3), tomamos G tan “grande” como sea posible a la vista de (2). Sea $G_0 = \mathbb{C} \setminus \{ \frac{1}{4} \leq x \}$. Entonces, si $|a_n| = n$ para un n fijo, $n \geq 2$, se sigue que $G = G_0$ (o una rotación de G_0), y que

$$f(z) = \frac{z}{(1 - e^{i\alpha} z)^2},$$

siendo α real. Estas aplicaciones f se llaman *funciones de Koebe*.

Este problema fue examinado por muchos matemáticos; véanse, por ejemplo, los libros de Pommerenke (1975), Duren (1983), Hayman (1958, 1994), Bernardi (1982: una bibliografía de funciones inyectivas). Estas referencias contienen conexiones muy interesantes con las teorías de variaciones de dominios, puntos extremales (y la teoría de operadores), simetrización, métricas extremales, etc. Sin embargo, la solución dada por de Branges utiliza muy pocos resultados de los trabajos precedentes. (Por supuesto que se han logrado muchos resultados relevantes en esas investigaciones, y todavía quedan problemas importantes que están fuera de estas consideraciones). De Branges presentó su demostración en Leningrado (San Petersburgo, Rusia) en 1984. Leningrado ha sido durante muchos años centro de investigaciones sobre la teoría de funciones analíticas (una escuela fundada por Goluzin). Allí la confirmó y, después de negociar, transformó su manuscrito original (de 385 páginas) en un manuscrito con menos de 20 páginas; al final de esta nota volveremos a tratar este tema. Hay varios informes sobre el proceso, poco común, mediante el cual la comunidad matemática aceptó la solución de L. de Branges; ver, por ejemplo, Fomenko-Kuzmina (*Math. Intelligencer*, v. 8) y el final del libro *The Bieberbach Conjecture* (1986). Al fin y al cabo, de Branges era un matemático experto, y si bien gran parte de su trabajo se dedicó a las relaciones entre el análisis complejo y el análisis funcional, trabajó con funciones enteras —y no funciones inyectivas—. Además, una versión anterior del teorema, de hacía pocos años, era errónea, y... ¡las 385 páginas! Con todo, después de algunas semanas, su teorema fue aceptado por los matemáticos en Leningrado.

La demostración de 16 páginas que publicó de Branges (*Acta Mathematica*, v. 154) muestra la influencia de sus colegas de Leningrado. Actualmente, hay otras demostraciones del teorema, pero todas siguen el plan básico de la original, incluyendo la esbozada en esta nota.