# ONDÍCULAS

**Rodrigo Trujillo González**

A principios del siglo XIX, J. B. Fourier desarrolló, en el estudio de la transmisión del calor en sólidos, un método de resolución de las ecuaciones en derivadas parciales lineales. Tales técnicas no obtuvieron el aprobado unánime de sus contemporáneos, convirtiéndose en centro de una gran controversia. Casi dos siglos después de su formulación, la comunidad científica considera las ideas de Fourier de una brillantez excepcional. Su impacto en la física, la ingeniería o la medicina, ha sido de tal dimensión que podemos afirmar que el análisis de Fourier es un elemento de *uso cotidiano* en nuestros días. Así, la resolución de un problema específico de la física desarrolló una importante área de las matemáticas.

La teoría de ondículas tiene una historia similar, ha sido uno de los puntos de encuentro de las matemáticas con otras disciplinas (ingeniería, física, computación, etc.), pero los matemáticos han sido unos invitados de excepción en su puesta en marcha y desarrollo.

## Idea central del análisis de Fourier

La idea fundamental del trabajo de Fourier, probado rigurosamente años después por Dirichlet, se basa en que toda función periódica puede ser representada como suma de senos y cosenos, la denominada serie de Fourier de la función. La afirmación hoy en día no deja de ser sorprendente. Fourier aseguraba que casi cualquier función que se repita a sí misma puede expresarse como suma de las funciones periódicas más conocidas. Lo llamativo de esta aseveración es que las funciones a considerar pueden presentar una amplia gama de irregularidades (discontinuidad, no derivabilidad, etc.). Esto plantea una verdadera fractura entre cómo son las funciones a aproximar y las funciones aproximantes, hecho que no se presentaba en la aproximación por polinomios de funciones infinitamente diferenciables que da la fórmula de Taylor. 86

## Defectos del análisis de Fourier

El avance de las tecnologías y la necesidad de análisis cada vez más precisos han sacado a la luz algunos *defectos* del análisis de Fourier. Uno de los principales inconvenientes de la representación de Fourier es la poca adecuación de estas funciones trigonométricas para reflejar fenómenos muy localizados. Una mínima perturbación en los datos en un momento determinado tiene un impacto global en toda su representación de Fourier, ya que las funciones base tienen su presencia en todo el rango de tiempo que representan. Así, el estudio de eventos complejos, donde se presentan la superposición de varios fenómenos bien diferenciados, muestran que el análisis de Fourier no es del todo apropiado.

## Una nueva herramienta

El punto de partida de la teoría de ondículas se sitúa en el intento de superar estos inconvenientes. Su formulación moderna se inicia a principios de los años 80 en los estudios de prospecciones petrolíferas de la compañía francesa ELF. El geofísico Jean Morlet necesitaba determinar con precisión las frecuencias presentes en el eco de las vibraciones enviadas a las profundidades del subsuelo. Cada frecuencia determina alguna de las características del tipo de estructura rocosa que se estudia (dureza, profundidad, etc.), la cual, obviamente, implicaría un tipo de prospección diferente.

La herramienta que requería Morlet era un análisis de las frecuencias dominantes en cada instante. Este objetivo constituye por sí sólo el centro de todo un campo de estudio denominado análisis tiempo-frecuencia de señales. Como ya comentamos, las funciones seno y coseno dan frecuencias precisas, pero se mantienen presentes en todo momento de la representación. La idea base de las ondículas consiste en construir, a partir de una única función, una familia que permita realizar este estudio de forma más precisa.

Este tipo de funciones había sido considerado, sin esta denominación por supuesto, de forma aislada por diversos autores. La referencia más antigua se sitúa en los primeros trabajos sobre comunicaciones en 1910 y son debidos a A. Haar. Otras referencias más recientes tienen orígenes diferentes y ven comparecer a matemáticos del nivel de A. Calderón o J. O. Strömberg.

Una ondícula (*wavelet* en inglés) es cualquier función $\Psi(x)$ definida en $\mathbb{R}$ (conjunto de números reales) que verifique que su familia de traslaciones y
86 dilataciones

$$\Psi_{j,k}(x) = 2^{\frac{-j}{2}}\, \Psi(2^{j} x - k)\ ,$$

con j y k enteros, constituye una base ortogonal de la clase de funciones de cuadrado integrable $L^2(\mathbb{R})$. De forma más precisa, toda función f(x) de $L^2(\mathbb{R})$ admite una representación de la forma

$$f(x) = \sum_{j,k \in \mathbb{Z}} c_{j,k}\, \Psi_{j,k}(x)$$

donde los coeficientes $c_{j,k}$ se obtienen al integrar el producto de la función y $\Psi_{j,k}$. Estos coeficientes son la información a manipular, almacenar y transmitir para reconstruir y analizar la función.

Aquí las funciones $\Psi_{j,k}$ juegan el mismo papel que los senos y cosenos en las series de Fourier. Las dilataciones de $\Psi(x)$ concentran sus oscilaciones en intervalos de distinto tamaño y las traslaciones permiten recorrer toda la recta real (Figura 1).

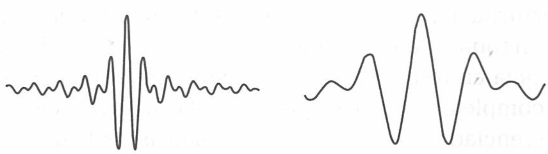

*Figura 1*