MARTINGALAS Y SU CONEXIÓN CON EL MUNDO ECONÓMICO

Manuel Linares Linares

La confluencia simultánea del análisis estocástico y ciertas teorías económicas, ha dado lugar en los últimos 30 años al nacimiento de lo que hoy se conoce como *matemáticas financieras estocásticas.* Esto, en cierto sentido, fue predicho por A. N. Kolmogorov en sus notas diarias (en la década de los años 30 del siglo XX), cuando escribió "solamente existe una capa sutil entre las cosas triviales y las no alcanzables en cada momento. Es en este estrato, donde se hacen los descubrimientos matemáticos. Esto se debe a que un problema aplicado tiene generalmente o una solución trivial o ninguna solución. La situación sería completamente diferente, si se eligen las nuevas herramientas de interés y se relacionan con determinados problemas aplicados". Debido a la complejidad e inmensidad de las matemáticas financieras, es por lo que, nos ceñiremos a las martingalas y algunas de sus versiones en el mundo económico.

En primer lugar analizaremos el concepto de *martingalas.* La palabra martingala proviene del francés *martingale* y ésta, a su vez, de la ciudad provenzal de Martingue. Su significado pasado y actual en ciertos usos proviene de un juego antiguo que en España recibe el nombre martingala, siendo también una martingala un lance de ese juego. Teniendo en cuenta que es un concepto bastante delicado, daremos una aproximación mediante el siguiente ejemplo.

Consideremos el experimento aleatorio consistente en el lanzamiento de una moneda. Dos jugadores A y B establecen la siguiente regla. Si sale cara el jugador B le da 1$ al A, pero si sale cruz, entonces B obtiene un 1$ del jugador A. Representamos con E(A) la media o esperanza matemática, mientras que, E(A/B) significa la media o esperanza matemática de A condicionado a que se haya dado B, con respecto a cierta probabilidad. Representemos por R_i la cantidad aleatoria 1$ o -1$ que el jugador A obtiene en el i-ésimo lanzamiento de la moneda. Es evidente que en esta situación se verifica:

$$E(R_i) = 0, \qquad E((R_i)^2) = 1, \qquad E(R_i\, R_j) = 0.$$

Debe observarse que si en las cinco primeras tiradas han salido cinco caras, estos resultados no afectan en nada a lo que aparece en el sexto lanzamiento. Esta propiedad es compartida también por el lanzamiento de un dado justo y por la ruleta. Pero no ocurre lo mismo en el juego del *blackjack*, pues en este el jugador puede arruinar a la banca. Llamemos a S_i la cantidad de dinero que ha ganado A hasta el i-ésimo lanzamiento. Podemos obtener inmediatamente:

$$E(S_i) = 0\,, \qquad E\,((S_i)^2) = E((R_1)^2 + 2R_1R_2 + \ldots) = i$$