Aprender de los errores

José Miguel Pacheco Castelao

Introducción

Es interesante constatar que con frecuencia los errores, siempre lamentables, nos enseñan más que la repetición de los éxitos. Vamos a comentar un ejemplo, con la idea de ofrecer una reflexión al profesorado de Matemáticas en general.

En la convocatoria de Selectividad del Distrito Único de Canarias de junio de 1999 se deslizó un error tipográfico en un enunciado del ejercicio de Matemáticas I del COU, que levantó cierta polémica. Como consecuencia, la reunión de correctores previa a la calificación de los exámenes acordó modificar los criterios de corrección para aliviar las consecuencias del desliz.

Sin embargo, el análisis de los ejercicios de los alumnos puso de relieve la falta de una visión crítica de la enseñanza en ciertos puntos clave, como se expondrá a continuación.

Teoremas y contraejemplos

Un error corriente en la enseñanza de las Matemáticas consiste en no insistir en la diferencia existente entre los conceptos de condición necesaria y suficiente. Aunque el propio significado de las palabras es lo bastante claro, en la práctica hay que afinar más mediante ejemplos y un análisis cuidadoso de ellos. El Análisis Matemático es el "reino de las condiciones suficientes", en el sentido de que la mayor parte de los teoremas clásicos que aparecen en la enseñanza elemental especifican únicamente condiciones suficientes. Ello es cierto también en niveles superiores, pero no nos ocupa aquí ahora. Recordemos que un teorema que dé una condición necesaria y suficiente se denomina *caracterización*. Por lo dicho antes, en Análisis las caracterizaciones son escasas y difíciles. Vamos a proponer unos ejemplos aclaratorios.

Ejemplo 1

Teorema (recibe varios nombres, el más común es el de Darboux): "Toda función real de variable real $f(x)$ que sea continua en un intervalo cerrado $[a, b]$ toma todos los valores entre el mínimo y el máximo alcanzados por ella en el intervalo".

La demostración resulta de combinar los teoremas de Bolzano y de Weierstrass, como es bien conocido. Sin embargo, no es tan habitual mostrar que existen funciones que no son continuas en un intervalo cerrado y que también toman todos los valores entre el mínimo y el máximo. Ello probaría que el teorema anterior da *sólo una condición suficiente y por lo tanto no caracteriza* a las funciones continuas en $[a, b]$. Ahí va un ejemplo que lo demuestra:

Consideramos una función definida en el intervalo [0, 1] (ver fig. 1):

$$f(x)=\begin{cases} x, & x<\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3}, & x=\frac{1}{3} \\ x, & \frac{1}{3}<x<\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3}, & x=\frac{2}{3} \\ x, & x>\frac{2}{3} \end{cases}$$

Es claro que esta función toma todos los valores entre 0 (el mínimo) y 1 (el máximo), pero no es continua en los puntos $\frac{1}{3}$ y $\frac{2}{3}$. Ello nos muestra que el teorema de Darboux no provee una condición necesaria. Por tanto, no caracteriza a las funciones continuas en el intervalo cerrado. El recíproco del Teorema de Darboux no se verifica, puesto que existen funciones que toman todos los valores... y, sin embargo, no son continuas.

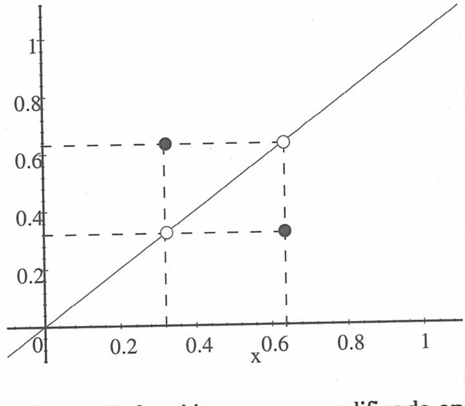

Figura 1: Gráfica de la función $y = x$, modificada en dos puntos.