Problemas comentados

A cargo del Club Matemático

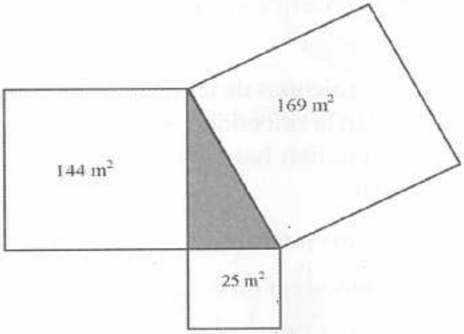
Nos ha parecido interesante dar a conocer los problemas que han sido propuestos este año en el XVIII Torneo. Siempre es conveniente leer con atención estos problemas y reflexionar sobre el modo que nuestros alumnos tienen de afrontarlos. No tratamos de presentar un estudio profundo, que sí lo merece, sino dar una impresión a todos los compañeros que ayude a preparar para próximas ediciones del torneo a sus alumnos.

Ejercicios propuestos en la primera fase del XVIII torneo de matemáticas de la Sociedad Canaria "Isaac Newton" de Profesores De Matemáticas, celebrada el 13 de abril de 2002

1.- He comprado 18 bidones de pintura. Uno de los botes se salía y manchó la factura, por lo que ahora no puedo saber cuánto costaba cada bote ni cuánto pagué por todos ellos.

¿Puedes ayudarme a resolverlo, deduciendo las 4 cifras que quedaron ocultas? Indica cómo lo resuelves.

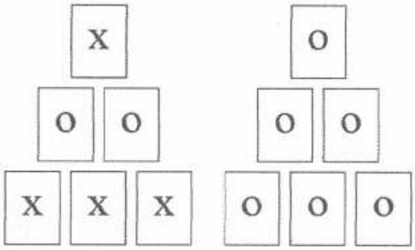
2.- La zona sombreada representa un solar. ¿Cuál es la superficie del solar? Los terrenos que lo limitan son cuadrados con las superficies que se indican. Explica cómo lo haces.



3.- Tengo 21 recipientes de igual capacidad: 7 están llenos de azúcar, 7 llenos hasta la mitad y los otros 7 están vacíos. Quiero repartir el azúcar y los recipientes entre mis tres hijos, de manera que cada uno reciba la misma cantidad de azúcar y el mismo número de recipientes. ¿Cómo puedo hacerlo si no puedo trasvasar azúcar de un recipiente a otro? Explica tu solución.

4.- Tengo un bidón lleno de arena gruesa, la cual pesa 25'056 kg. Para rellenar los huecos entre los granos de arena, necesito echar 5'36 l de agua. Sabiendo que un decímetro cúbico de arena pesa 1'566 kg, averigua qué tanto por ciento del volumen de arena del bidón representan los huecos. Razona tu respuesta.

5.- Un cuarto es a un tercio como un medio es a X. ¿Qué número es X? Explica qué cálculos o propiedades usas.



<A> <B>

6.- ¿Cuántas cartas con **X** debemos pasar del montón A al B para que, puestas todas las cartas cara abajo (sus dorsos son todos iguales), si elegimos una carta al azar en el montón A la probabilidad de que sea una carta **X** sea la misma que si la elegimos en el montón B? Expón tus razonamientos.

Y estas son algunas de las respuestas recogidas por la comisión correctora que indican la sinceridad, el ingenio, la ingenuidad e incluso la inocencia, que nos pueden hacer sonreír, pero que nos deben hacer, sobre todo, reflexionar.

Del segundo ejercicio:

"El área puede ser en m (30 m) o en m^2 (1800 m^2)"

"El área no es lo mismo que la superficie" Concluyendo que la superficie es el doble del área pues el triángulo tiene dos superficies (anverso y dorso) de igual área.

"Los cuadrados tienen cuatro lados lo elevé por tres lados del triángulo y me dio la superficie del solar: $4^3 = 64$"

del primer ejercicio:

"No me veo capaz de terminarlo"

"Esta parte de adelante, no vale"

"No la puedo borrar porque se me ha *caido* la goma y no la *encontro*"

"Sigue atrás"

"... y lo he resuelto probando, que por probar no quede"

Y , aunque hemos recogido algunas más, esta píldora de ingenio:

"Sí puedo ayudarte lo único que tienes que hacer es volver a la *Ferretería Naveral* y entregarles tu factura manchada. Ellos siempre se guardan una factura de sus ventas y podrán solucionar tu problema."

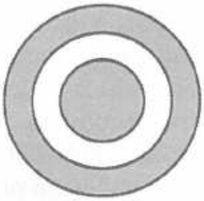
¿Qué puntuación le daría? Al fin y al cabo explica cómo se "resuelve" el problema.

Relación de los problemas propuestos en la Fase Final del último (XVIII) Torneo de Matemáticas y comentarios respecto a su desarrollo.

1.- LOS CUBOS

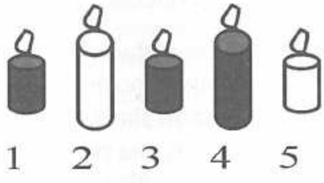
Si se suman los cubos de todos los números naturales desde el 1 hasta el 2002, ¿cuál es la cifra de las unidades de esta suma? Explica tus razonamientos.

2.- LA DIANA



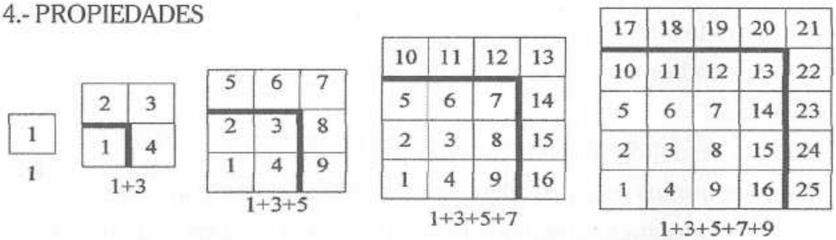
En la diana de la figura, el círculo intermedio tiene un radio doble del que tiene el círculo pequeño, y el círculo grande un radio triple del que tiene el círculo pequeño. La diana tienen una superficie total de 1113 cm^2. ¿Cuál es el área total de la zona blanca? Usa 22/7 como valor aproximado de π y haz las operaciones necesarias en esta hoja de respuesta; no las borres.

3.- LAS VELAS



Las velas de Ana y de Beatriz son del mismo tamaño. Las de Beatriz y Clara son del mismo color. Las de Clara y Daniel no son del mismo tamaño. Finalmente, las de Daniel y Ana no son del mismo color. ¿Cuál es la vela de Enrique? Explica tu razonamiento.

4.- PROPIEDADES



Observa la serie de figuras de arriba y escribe que tipo de propiedad o propiedades se puede deducir de este diagrama. Razona tu respuesta.

5.- VALORES ABSOLUTOS

¿Cuántos números cumplen la condición de que $\left|\left|\left|x-2\right|-4\right|-5\right|=1$? Indica los pasos que das para llegar a la respuesta.

(Recuerda que el valor absoluto de un número es: $|a|=a$ y $|-a|=a$)

6.- PRUEBA MANIPULATIVA

Matilde tiene una tableta de chocolate formada por un rectángulo de 5 por 8 cuadritos. Cada vez que se encuentra con una amiga le ofrece chocolate partiendo la tableta por una línea recta vertical u horizontal. ¿A cuántas amigas como máximo puede dar chocolate si quiere comerse ella el último cuadrito? Utiliza el material que se te proporciona para experimentar y responde luego por escrito.

(El material proporcionado consistió en reproducciones de una tableta de 8x5 y unas tijeras)

Y algunos comentarios, esta vez, de tipo estadístico, para una prueba que nos pareció adecuada para el nivel y la selección que se pretendía.

De las 108 contestaciones esperadas, las únicas preguntas que algunos de los participantes no contestan son: la 5 (cinco alumnos las dejan en blanco), la 1 (cuatro sin responder) y la 4 (un alumno), sucediendo que cinco alumnos dejan una pregunta en blanco, uno deja dos y otro 3.

La prueba manipulativa y la pregunta 3 parecen ser las más fáciles, pues ambas tienen una media de 8, mientras que, con una media de 1'87, el ejercicio 5 resultó tener mayor dificultad. Esta dificultad la atribuimos al desconocimiento del concepto de valor absoluto y la incapacidad de analizar nuevas reglas de operaciones con números.

El mayor número de dieces fue para la pregunta número 3 (la mitad de las respuestas) mientras que, en los ejercicios 4 y 5 nadie obtuvo un 10.

El mayor número de ceros fue para la pregunta 1, seguida de la 5 y la 2. Esto nos hace suponer que, pese a tener las herramientas necesarias para resolverlo, el enunciado del ejercicio 1 desanimó más fácilmente a los alumnos que el enunciado del número 5.

Una vez visto lo anterior, retomamos la línea de nuestros artículos comentando los problemas propuestos y ofreciendo alguno nuevo.

En el Volumen 49 de la revista "Números", correspondiente a marzo de 2002, aparecían dos problemas propuestos, los números 5 y 6, para recibir sus soluciones o comentarios al respecto. Como se suele decir para justificar los errores, los duendes de la imprenta hicieron que en el número 5 se deslizara una errata casi al final del mismo. Para despejar dudas lo volvemos a proponer, esta vez sin errores:

Problema nº 5: **Si el número de mi casa fuese múltiplo de 3, entonces se trataría de un número comprendido entre 50 y 59, inclusive. Si el número de mi casa no fuese múltiplo de 4, entonces se trataría de un número comprendido entre 60 y 69, inclusive. Si el número de mi casa no fuese múltiplo de 6, entonces se trataría de un número comprendido entre 70 y 79, inclusive. ¿Cuál es el número de mi casa?**

Esperamos que con esta aclaración sean muchos los compañeros que se decidan a resolverlo y enviarnos sus comentarios. Les aseguro que se trata de un problema sorprendente y con muchas cuestiones dignas de ser sometidas al criterio de los alumnos.

En cuanto al otro problema, recordemos que su enunciado era el siguiente:

Augusto decide construir una secuencia de números naturales. Escribe el primer número y, a partir de ahí, la suma de cualquier número con el doble del anterior es siempre igual a 100. ¿Por qué número debe comenzar Augusto para obtener la secuencia más larga?

Lo primero que se observa al afrontar la resolución de este problema es la dificultad de entender su enunciado. Para los chicos y chicas de la clase es estimulante proponer de vez en cuando problemas que tengan este tipo de dificultad, para entrenarles también en las dificultades semánticas que pueden encontrar.

Para aclararnos, empezaremos por formar alguna secuencia al azar para ver como funciona. Así, si decidimos que el primer término de la serie sea 40, por ejemplo, tendremos:

$A_1 = 40$

$A_2 = 20$, porque $20 + 2 \cdot 40 = 20 + 80 = 100$

$A_3 = 60$, porque $60 + 2 \cdot 20 = 60 + 40 = 100$

$A_4 = \ldots$, porque $\ldots + 2 \cdot 60 = \ldots + 120 > 100$

Es decir, la secuencia funciona pero se termina en el tercer término. El problema pide asegurar cuál es la secuencia de mayor número posible de términos.

Unas cuantas consideraciones al respecto:

a) los términos han de ser números naturales

b) el primer término ha de ser mayor que cero

c) el primer término ha de ser menor que 50

La primera consideración proviene del propio enunciado. La segunda y la tercera brotan de las características de la secuencia:

$A_1 = 0$

$A_2 = 100$, porque $100 + 2 \cdot 0 = 100 + 0 = 100$

$A_3 = \ldots$, porque $\ldots + 2 \cdot 100 = \ldots + 200 > 100$

Y ahí se acaba.

$A_1 = 50$

$A_2 = 0$, porque $0 + 2 \cdot 50 = 0 + 100 = 100$

$A_3 = 100$, porque $100 + 2 \cdot 0 = 100 + 0 = 100$

Y ahí se acaba, como hemos visto en el caso anterior.

$A_1 = 51$

$A_2 = \ldots$, porque $\ldots + 2 \cdot 51 = 20 + 102 > 100$

Y ahí acaba también, sin apenas haber comenzado. Cosa que ocurrirá también con cualquier otro número mayor 100.

Ahora estamos, pues, en disposición de empezar el razonamiento. Utilicemos algo de álgebra para expresar la forma de los términos de la secuencia:

$A_1 = A_1$

$A_2 = 100 - 2\,A_1$

$A_3 = 100 - 2\,A_2 = 100 - 2\,(100 - 2\,A_1) = 4\,A_1 - 100$

$A_4 = 100 - 2\,A_3 = 100 - 2\,(4\,A_1 - 100) = 300 - 8\,A_1$

Y así sucesivamente, encontramos

$A_5 = 16\,A_1 - 500$

$A_6 = 1100 - 32\,A_1$

$A_7 = 64\,A_1 - 2100$

$A_8 = 4100 - 128\,A_1$

$A_9 = 256\,A_1 - 8100$

...

Como todas esas expresiones han de ser mayores que cero, podemos plantear las inecuaciones que nos fijan el límite para llegar hasta ese término, de la forma siguiente:

$A_1 > 0$	$A_1 > 0$
$100 - 2\,A_1 > 0$	$A_1 < 50$
$4\,A_1 - 100 > 0$	$A_1 > 25$
$300 - 8\,A_1 > 0$	$A_1 < 37{,}5$
$16\,A_1 - 500 > 0$	$A_1 > 31{,}25$
$1100 - 32\,A_1 > 0$	$A_1 < 34{,}375$
$64\,A_1 - 2100 > 0$	$A_1 > 32{,}8125$
$4100 - 128\,A_1 > 0$	$A_1 < 32{,}03125$
$256\,A_1 - 8100 > 0$	$A_1 > 31{,}640625$

Al llegar al noveno término se produce la primera contradicción. Por tanto, ese término marcará el final de la secuencia más larga, que será de ocho términos.

Por otra parte, las acotaciones obtenidas nos indican que el primer término ha de ser inferior a 34 y superior a 32; está claro que el primer término ha de ser $A_1 = 33$.

Si construimos la secuencia a partir de ese número, obtendremos:

$A_1 = 33$

$A_2 = 100 - 66 = 34$

$A_3 = 100 - 68 = 32$

$A_4 = 100 - 64 = 36$

$A_5 = 100 - 72 = 28$

$A_6 = 100 - 56 = 44$

$A_7 = 100 - 88 = 12$

$A_8 = 100 - 24 = 76$

$A_9 = 100 - 152$ no cumple las condiciones.

Respuesta: la secuencia más larga es 33, 34, 32, 36, 28, 44, 12 y 76.

Para terminar, proponemos un nuevo problema que se une al nº 5 como trabajo para el próximo número, esperando como siempre recibir algún comentario sobre el mismo. Resulta muy interesante, pues de entrada nos da la tentación de utilizar los sistemas de ecuaciones resultando la situación excesivamente compleja. Cuando lo abordamos de otra forma más numérica, sentimos la tentación al final de utilizar el ensayo y error de una manera poco dirigida, lo cual puede llevar a excesivo cálculo. Hay un atajo poco utilizado, pero que aparece con frecuencia en el cálculo aritmético simple y resuelve la situación de manera espléndida. Inténtenlo.

Problema nº 7: **Un agricultor tenía cinco sacos de papas y pidió a su hijo que los pesara para llevarlos al mercado. El hijo, estudiante de matemáticas, los pesó de dos en dos de todas las maneras posibles. Las pesadas que obtuvo fueron: 46, 48, 49, 50, 51, 52, 53, 54, 56 y 57 kg. ¿Cómo averiguó el peso de cada saco? ¿Cuánto pesa cada saco?**

Ánimo y hasta el próximo NÚMEROS.

Club Matemático.

El Club Matemático está formado por los profesores José Antonio Rupérez Padrón, del IES de Canarias-Cabrera Pinto (La Laguna), y Manuel García Déniz, del IES Tomás de Iriarte (Santa Cruz de Tenerife).